La Distribución Wigner

Análisis Tiempo–Frecuencia

IIE

[1]Facultad de Ingeniería Universidad de la República

September 7, 2021

Outline

1. La Distribución Wigner
   - Introducción
   - Propiedades
   - Los términos cruzados de Wigner

Contenido

Introducción

- La distribución Wigner es "cualitativamente" diferente al espectrograma.

Introducción

- La distribución Wigner es "cualitativamente" diferente al espectrograma.
- Propuesto en 1932 por E. Wigner para estudiar la mecánica cuántica, e introducido al análisis de señales por J.-A. Ville 15 años más tarde.

Introducción

- La distribución Wigner es “cualitativamente” diferente al espectrograma.
- Propuesto en 1932 por E. Wigner para estudiar la mecánica cuántica, e introducido al análisis de señales por J.-A. Ville 15 años más tarde.
- En 1980 Claasen y Mecklenbräuker desarrollan un acercamiento completo a la distribución “Wigner–Ville” que deriva en investigación en el análisis “tiempo–frecuencia”.

Introducción

- La distribución Wigner es "cualitativamente" diferente al espectrograma.
- Propuesto en 1932 por E. Wigner para estudiar la mecánica cuántica, e introducido al análisis de señales por J.-A. Ville 15 años más tarde.
- En 1980 Claasen y Mecklenbräuker desarrollan un acercamiento completo a la distribución "Wigner–Ville" que deriva en investigación en el análisis "tiempo–frecuencia".
- La distribución Wigner ha sido en varias ocasiones estudiada en contraposición al espectrograma. Mientras que WD tiene mejores propiedades que el SP, también tiene limitaciones.

Introducción

- La distribución Wigner es "cualitativamente" diferente al espectrograma.
- Propuesto en 1932 por E. Wigner para estudiar la mecánica cuántica, e introducido al análisis de señales por J.-A. Ville 15 años más tarde.
- En 1980 Claasen y Mecklenbräuker desarrollan un acercamiento completo a la distribución "Wigner–Ville" que deriva en investigación en el análisis "tiempo–frecuencia".
- La distribución Wigner ha sido en varias ocasiones estudiada en contraposición al espectrograma. Mientras que WD tiene mejores propiedades que el SP, también tiene limitaciones.
- ¿Qué apareció primero, la señal, la transfomada de Fourier o la distribución Wigner?

La distribución Wigner

- La distribución de Wigner se construye como

$$W(t,\omega) = \frac{1}{2\pi} \int s^*\left(t - \tfrac{1}{2}\tau\right) s\left(t + \tfrac{1}{2}\tau\right) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

La distribución Wigner

- La distribución de Wigner se construye como

$$W(t,\omega) = \frac{1}{2\pi} \int s^*\left(t - \tfrac{1}{2}\tau\right) s\left(t + \tfrac{1}{2}\tau\right) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- Se dice que la distribution Wigner es "bilineal" con la señal.

La distribución Wigner

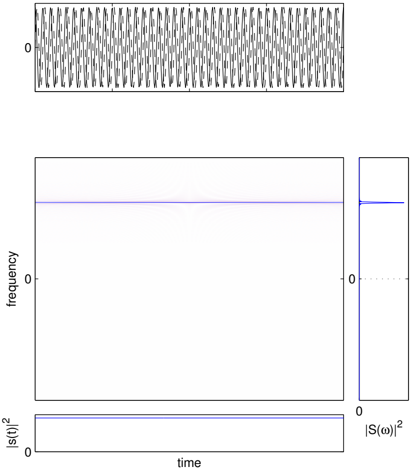
- La distribución de Wigner se construye como

$$W(t,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int s^*\big(t-\tfrac{1}{2}\tau\big)s\big(t+\tfrac{1}{2}\tau\big)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

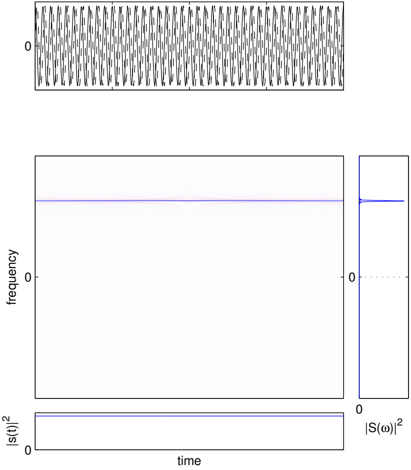
- Se dice que la distribution Wigner es “bilineal” con la señal.
- La WD puede ser también construída a partir del espectro de la señal, mediante

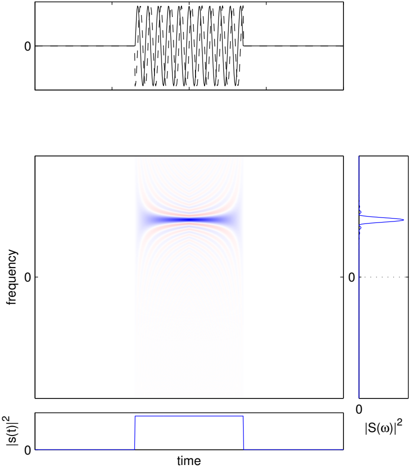
$$W(t,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int S^*\big(\omega+\tfrac{1}{2}\theta\big)S\big(\omega-\tfrac{1}{2}\theta\big)e^{-j\theta t}d\theta$$

Ejemplos: Sinusoidales

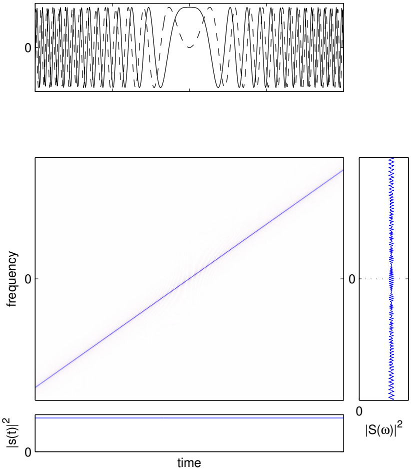


Ejemplos: Sinusoidales

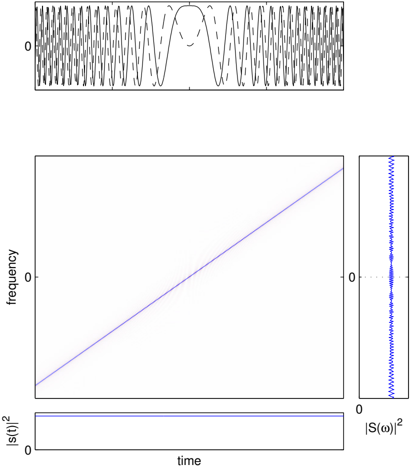


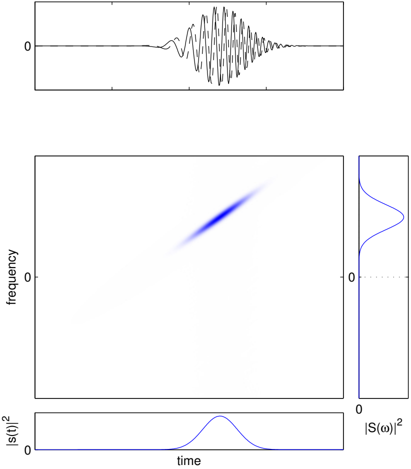


Ejemplos: Chirps

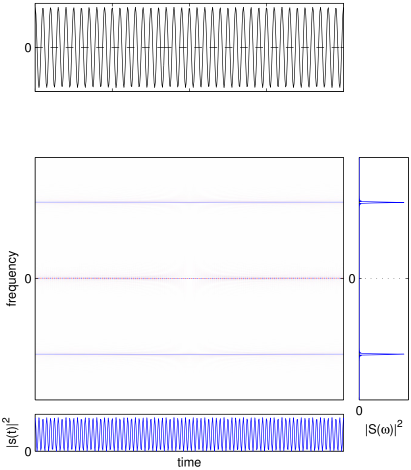


Ejemplos: Chirps

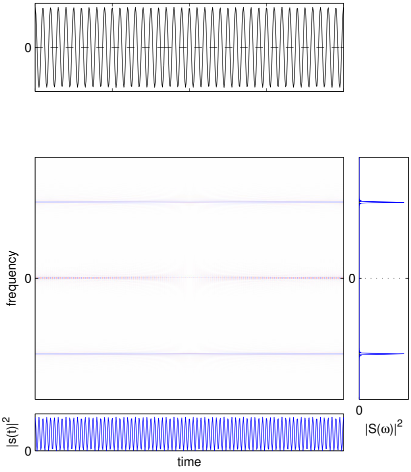


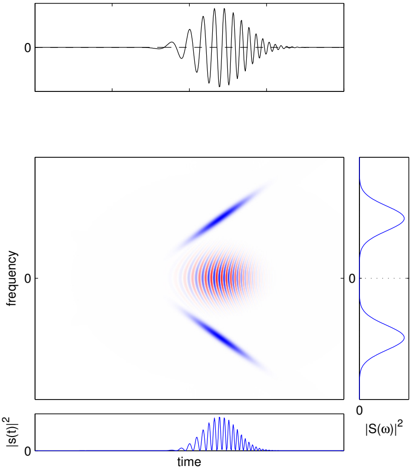


Ejemplos: Señales reales



Ejemplos: Señales reales





Contenido

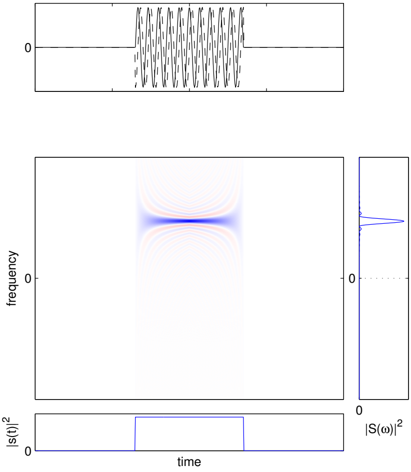
Soporte Finito

La distribución de Wigner tiene un soporte finito en tiempo y frecuencia "débil".

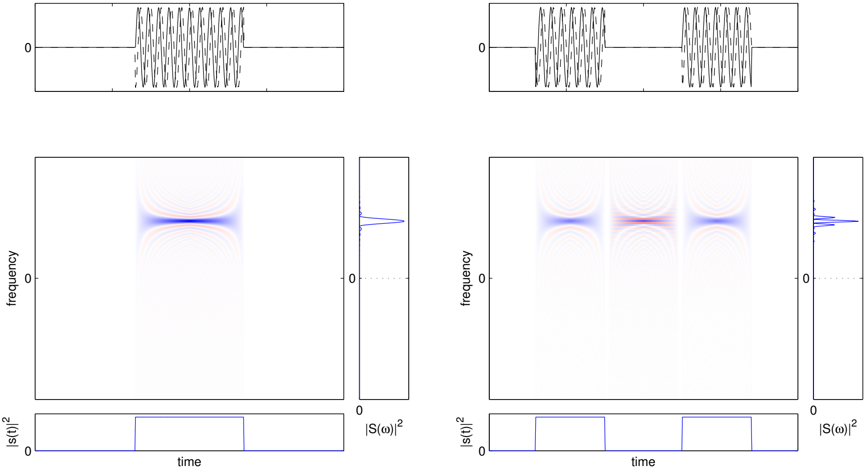
si $s(t)$ es cero fuera de $(t_1, t_2) \implies W(t, \omega) = 0$ para t fuera de (t_1, t_2)

si $S(\omega)$ es cero fuera de $(\omega_1, \omega_2) \implies W(t, \omega) = 0$ para ω fuera de (ω_1, ω_2)

Soporte Finito



Soporte Finito



Propiedades Generales

- Real: $W(t,\omega) = W^*(t,\omega)$
- Marginales

$$\int W(t,\omega)\, d\omega = |s(t)|^2 \quad ; \quad \int W(t,\omega)\, dt = |S(\omega)|^2$$

$$E = \iint W(t,\omega)\, d\omega\, dt = \int |s(t)|^2\, dt$$

- Corrimientos en Tiempo y Frecuencia

$$e^{j\omega_0 t} s(t - t_0) \;\longrightarrow\; W(t - t_0, \omega - \omega_0)$$

Propiedades Generales

- Real: $W(t,\omega) = W^*(t,\omega)$
- Marginales

$$\int W(t,\omega)\,d\omega = |s(t)|^2 \quad ; \quad \int W(t,\omega)\,dt = |S(\omega)|^2$$

$$E = \iint W(t,\omega)\,d\omega\,dt = \int |s(t)|^2\,dt$$

- Corrimientos en Tiempo y Frecuencia

$$e^{j\omega_0 t} s(t-t_0) \longrightarrow W(t-t_0, \omega-\omega_0)$$

Propiedades Generales

- Real: $W(t,\omega) = W^*(t,\omega)$
- Marginales

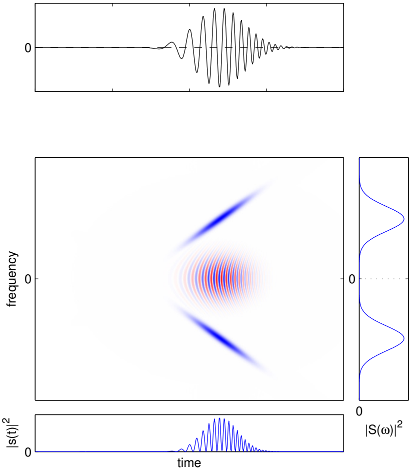
$$\int W(t,\omega)\, d\omega = |s(t)|^2 \quad ; \quad \int W(t,\omega)\, dt = |S(\omega)|^2$$

$$E = \iint W(t,\omega)\, d\omega\, dt = \int |s(t)|^2\, dt$$

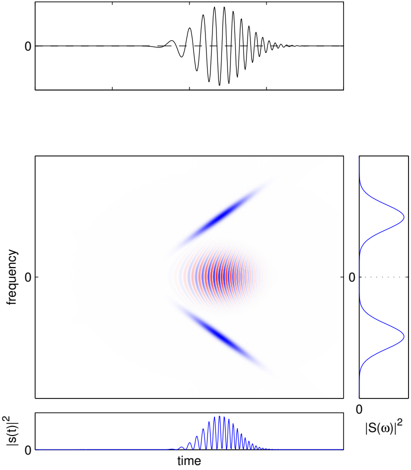
- Corrimientos en Tiempo y Frecuencia

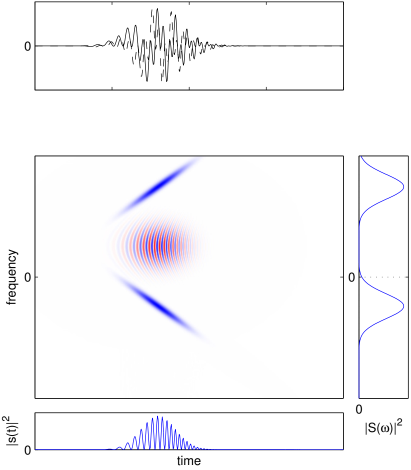
$$e^{j\omega_0 t} s(t - t_0) \longrightarrow W(t - t_0, \omega - \omega_0)$$

Ejemplos: Corrimientos en Tiempo y Frecuencia



Ejemplos: Corrimientos en Tiempo y Frecuencia





Promedios Locales

El promedio local temporal y espectral resultan en

$$\langle \omega \rangle_t = \varphi'(t) \quad \langle t \rangle_\omega = -\psi'(\omega)$$

El ancho local es

$$\sigma^2_{\omega|t} = \langle \omega^2 \rangle_t - \langle \omega \rangle_t^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{A'(t)}{A(t)}\right)^2 - \frac{A''(t)}{A(t)}\right]$$

Esta expresión para $\sigma^2_{\omega|t}$ puede tomar valores negativos y no ser interpretable.

Promedios Locales

El promedio local temporal y espectral resultan en

$$\langle \omega \rangle_t = \varphi'(t) \quad \langle t \rangle_\omega = -\psi'(\omega)$$

El ancho local es

$$\sigma^2_{\omega|t} = \langle \omega^2 \rangle_t - \langle \omega \rangle_t^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{A'(t)}{A(t)}\right)^2 - \frac{A''(t)}{A(t)}\right]$$

Esta expresión para $\sigma^2_{\omega|t}$ puede tomar valores negativos y no ser interpretable.

Ejemplo: Promedios Locales

- Chirp Puro

$$s(t) = e^{j\omega_0 t + j\beta t^2/2}$$

$$W(t,\omega) = \delta(\omega - \omega_0 - \beta t)$$

Ejemplo: Promedios Locales

- Chirp Puro

$$s(t) = e^{j\omega_0 t + j\beta t^2/2}$$

$$W(t,\omega) = \delta(\omega - \omega_0 - \beta t)$$

- Chirp con Amplitud Gaussiana

$$s(t) = e^{-\alpha t^2/2}\, e^{j\omega_0 t + j\beta t^2/2}$$

$$W(t,\omega) = e^{-\alpha t^2}\, e^{-(\omega - \beta t - \omega_0)^2/\alpha}$$

Contenido

La distribución de Wigner de la Suma de dos Señales

Sea $s(t)$ la suma de dos señales

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

La distribución de Wigner de la señal suma es

$$W(t,\omega) = W_{11}(t,\omega) + W_{22}(t,\omega) + W_{12}(t,\omega) + W_{21}(t,\omega)$$

La distribución de Wigner de la Suma de dos Señales

Sea $s(t)$ la suma de dos señales

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

La distribución de Wigner de la señal suma es

$$W(t,\omega) = W_{11}(t,\omega) + W_{22}(t,\omega) + W_{12}(t,\omega) + W_{21}(t,\omega)$$

donde el término $W_{12}(t,\omega)$ es llamado "distribución cruzada de Wigner"

$$W_{12}(t,\omega) = \frac{1}{2\pi} \int s_1^*(t - \tfrac{1}{2}\tau) s_2(t + \tfrac{1}{2}\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

La distribución de Wigner de la Suma de dos Señales

Sea $s(t)$ la suma de dos señales

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

La distribución de Wigner de la señal suma es

$$W(t,\omega) = W_{11}(t,\omega) + W_{22}(t,\omega) + W_{12}(t,\omega) + W_{21}(t,\omega)$$

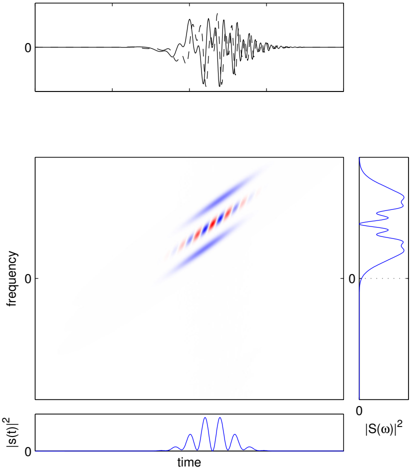
donde el término $W_{12}(t,\omega)$ es llamado "distribución cruzada de Wigner"

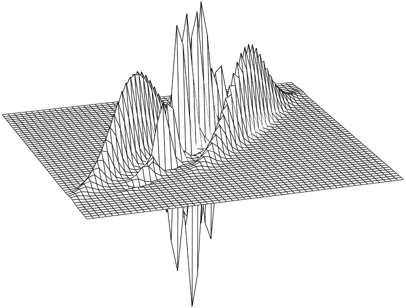
$$W_{12}(t,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int s_1^*(t - \tfrac{1}{2}\tau) s_2(t + \tfrac{1}{2}\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

El término $W_{12}(t,\omega)$ es complejo, pero como $W_{12}(t,\omega) = W_{21}^*(t,\omega)$

$$W(t,\omega) = W_{11}(t,\omega) + W_{22}(t,\omega) + 2\Re\left\{W_{12}(t,\omega)\right\}$$

Términos cruzados: Dos Chirplets Gaussianos





Términos cruzados: Dos Wavelets Gaussianos

Suma de dos tonos con modulación de amplitud

$$s(t) = A_1(\alpha_1\pi)^{1/4}\, e^{-\alpha_1 t^2/2 + j\omega_1 t} + A_2(\alpha_2\pi)^{1/4}\, e^{-\alpha_2 t^2/2 + j\omega_2 t}$$

La distribución de Wigner es exactamente

$$\begin{aligned} W(t,\omega) =& \frac{A_1^2}{\pi}\, e^{-\alpha_1 t^2/2 - (\omega-\omega_1)^2/\alpha_1} + \frac{A_2^2}{\pi}\, e^{-\alpha_2 t^2/2 - (\omega-\omega_2)^2/\alpha_2} \\ & + 2\frac{A_1A_2}{\pi}\sqrt{\frac{2(\alpha_1\alpha_2)^{1/2}}{\alpha_1+\alpha_2}} \cos\left(\frac{2t}{\alpha_1+\alpha_2}(\omega+\omega_2\alpha_1-\omega_1\alpha_2)\right) \\ & \times \exp\left(-\frac{2}{\alpha_1+\alpha_2}\left(\alpha_1\alpha_2 t^2 + \left(\omega - \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\right)^2\right)\right) \end{aligned}$$

Términos cruzados: Dos Wavelets Gaussianos

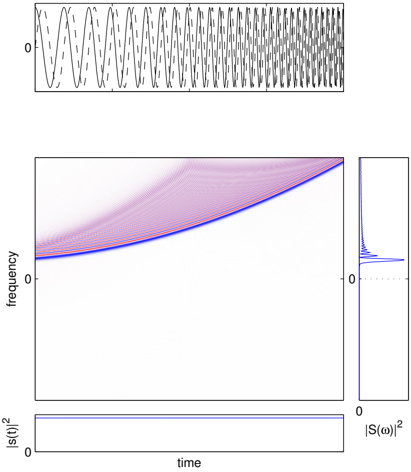
Suma de dos tonos con modulación de amplitud

$$s(t) = A_1(\alpha_1\pi)^{1/4}\, e^{-\alpha_1 t^2/2 + j\omega_1 t} + A_2(\alpha_2\pi)^{1/4}\, e^{-\alpha_2 t^2/2 + j\omega_2 t}$$

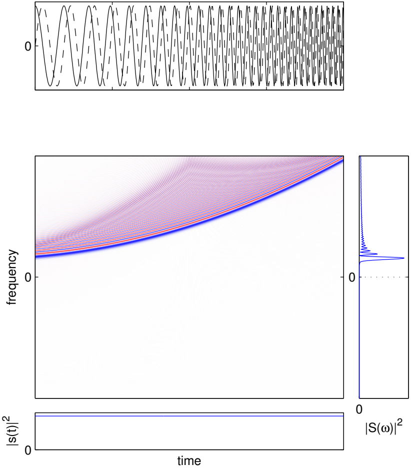
La distribución de Wigner es exactamente

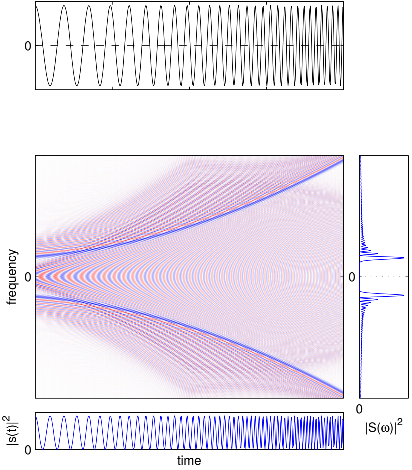
$$\begin{aligned} W(t,\omega) =& \frac{A_1^2}{\pi}\, e^{-\alpha_1 t^2/2 - (\omega-\omega_1)^2/\alpha_1} + \frac{A_2^2}{\pi}\, e^{-\alpha_2 t^2/2 - (\omega-\omega_2)^2/\alpha_2} \\ & + 2\frac{A_1 A_2}{\pi}\sqrt{\tfrac{2(\alpha_1\alpha_2)^{1/2}}{\alpha_1+\alpha_2}}\cos\left(\frac{2t}{\alpha_1+\alpha_2}(\omega + \omega_2\alpha_1 - \omega_1\alpha_2)\right) \\ & \times \exp\left(-\tfrac{2}{\alpha_1+\alpha_2}\left(\alpha_1\alpha_2 t^2 + \left(\omega - \tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\right)^2\right)\right) \end{aligned}$$

Términos cruzados: Chirp No Lineal

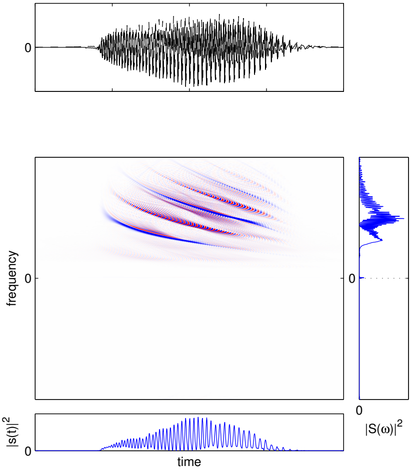


Términos cruzados: Chirp No Lineal





Términos cruzados: Señal de Murciélago



Términos cruzados: Señal de Murciélago