Distribuciones y Densidades

Análisis Tiempo–Frecuencia

IIE

[1]Facultad de Ingeniería Universidad de la República

September 27, 2023

Contenido

Densidades Unidimensionales

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} P(x)\ dx$$

Área total:

$$\text{Área total } = \int P(x)\ dx = 1$$

Promedio:

$$< x >= \int xP(x)\ dx$$

$$< f(x) >= \int f(x)P(x)\ dx = \int uP(u)\ du$$

Desviación Estándar:

$$\sigma_x^2 = \int (x- < x >)^2 P(x)\ dx =< x^2 > - < x >^2$$

Momentos:

$$< x^n >= \int x^n P(x)\ dx$$

Funciones Características Unidimensionales

La función característica es la transformada de Fourier de una densidad

$$M(\theta) = \int e^{j\theta x} P(x)\ dx$$

y por lo tanto

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-j\theta x} M(\theta)\ d\theta$$

Densidades Bidimensionales

Área total: $= 1$

$$\text{Área total } = \iint P(x,y)\ dx\ dy = 1$$

Marginales:

$$P(x) = \int P(x,y)\ dy \quad ; \quad P(y) = \int P(x,y)\ dx$$

Densidades Bidimensionales

Promedios globales

$$< g(x,y) >= \iint g(x,y)P(x,y)\ dx\ dy$$

Funciones características bidiemsionales y momentos:

$$M(\theta,\tau) =< e^{j\theta x + j\tau y} >= \iint e^{j\theta x + j\tau y}P(x,y)\ dx\ dy$$

e invirtiendo esa expresión:

$$P(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\iint M(\theta,\tau)e^{-j\theta x - j\tau y}\ d\theta\ d\tau$$

Densidades Bidimensionales

Marginales respecto a θ y τ

$$M(\theta) = \int e^{j\theta x} P(x)\ dx = \int e^{j\theta x} P(x, y)\ dxdy = M(\theta, 0)$$

$$M(\tau) = \int e^{j\tau y} P(y)\ dy = \int e^{j\tau y} P(x, y)\ dxdy = M(0, \tau)$$

Ejemplo: Gausiana bidimensional

$$P(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{\frac{-1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_y^2} - 2r\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_x\sigma_y}\right]}$$

con $|r| \leq 1$

Transformando, se tiene

$$M(\theta,\tau) = e^{\left[ja\theta + jb\tau - \frac{1}{2}(\sigma_x^2\theta^2 + 2r\sigma_x\sigma_y\theta\tau + \sigma_y^2\tau^2)\right]}$$

Y la marginal en x es por lo tanto:

$$M(\theta) = M(\theta,0) = e^{\left[ja\theta - \frac{1}{2}(\sigma_x^2\theta^2)\right]}$$

Promedios locales y globales

Probabilidad condicional (Bayes)

$$P(y|x) = \frac{P(x,y)}{P(x)} \quad ; \quad P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}$$

Promedios condicionales y su desviación estándar

$$< y >_x = \int yP(y|x)\ dy = \frac{1}{P(x)} \int yP(x,y)dy$$

Desviación estándar condicional.

$$\sigma^2_{y|x} = \frac{1}{P(x)} \int (y - < y >_x)^2 P(x,y)dy = < y^2 >_x - < y >^2_x$$

Vínculo entre promedios locales y globales

Planteando el valor medio:

$$< y >= \iint yP(x, y)\ dxdy = \iint yP(y|x)P(x)\ dxdy$$

$$< y >= \int < y >_x P(x)\ dx$$

Vínculo entre promedios locales y globales

Planteando la varianza, se puede probar:

$$\sigma_y^2 = \int \sigma_{y|x}^2 P(x)\ dx + \int (< y >_x - < y >)^2 P(x) dx$$

Distribuciones de nuevas variables

Sea $u = f(x)$, los planteos son similares a los anteriores

$$P(u) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-j\theta u} M_u(\theta)\ d\theta$$

con

$$M_u(\theta) =< e^{j\theta f(x)} >= \int e^{j\theta f(x)} P(x)\ dx$$

Contenido

Motivación

Las señales cambian su contenido frecuencial a lo largo del tiempo. Puede haber componentes frecuenciales diferentes en un mismo instante.

Ideas Fundamentales

El objetivo básico del análisis Tiempo–Frecuencia es encontrar una función que describa la densidad de energía en tiempo y frecuencia simultáneamente.

Ideas Fundamentales

El objetivo básico del análisis Tiempo–Frecuencia es encontrar una función que describa la densidad de energía en tiempo y frecuencia simultáneamente.

Como

$$\begin{aligned} |s(t)|^2 &= \text{intensidad por unidad en el tiempo } t \\ |s(t)|^2 \Delta t &= \text{energía fraccional en el intervalo } \Delta t \text{ en el tiempo } t \end{aligned}$$

y de manera análoga para $|S(\omega)|^2$ y $|S(\omega)|^2 \Delta\omega$.

Ideas Fundamentales

El objetivo básico del análisis Tiempo–Frecuencia es encontrar una función que describa la densidad de energía en tiempo y frecuencia simultáneamente.

Como

$$\begin{aligned} |s(t)|^2 &= \text{intensidad por unidad en el tiempo } t \\ |s(t)|^2 \Delta t &= \text{energía fraccional en el intervalo } \Delta t \text{ en el tiempo } t \end{aligned}$$

y de manera análoga para $|S(\omega)|^2$ y $|S(\omega)|^2 \Delta\omega$.

Se busca una densidad conjunta $P(t,\omega)$, de manera que

$$\begin{aligned} P(t,\omega) &= \text{la densidad en el tiempo } t \text{ y frecuencia } \omega \\ P(t,\omega)\Delta t \Delta\omega &= \text{energía fraccional en la celda } \Delta t \Delta\omega \text{ en } t \text{ y } \omega \end{aligned}$$

Preguntas Fundamentales

- ¿Existe una distribución conjunta tiempo–frecuencia (TFD) $P(t, \omega)$ que satisface la idea intuitiva de un espectro variante en el tiempo?
- ¿Cómo se puede construir?
- ¿Pueden ser interpretadas como verdaderas distribuciones?
- ¿Representan correlaciones entre tiempo y frecuencia?
- ¿Qué restricciones deben imponerse para obtener dichas densidades?
- ¿Parecen existir, pero si no cumplen completamente ser densidades, qué es lo mejor que se puede obtener?
- ¿Hay limitaciones para su desarrollo?

Preguntas Fundamentales

- ¿Existe una distribución conjunta tiempo–frecuencia (TFD) $P(t, \omega)$ que satisface la idea intuitiva de un espectro variante en el tiempo?
- ¿Cómo se puede construir?
- ¿Pueden ser interpretadas como verdaderas distribuciones?
- ¿Representan correlaciones entre tiempo y frecuencia?
- ¿Qué restricciones deben imponerse para obtener dichas densidades?
- ¿Parecen existir, pero si no cumplen completamente ser densidades, qué es lo mejor que se puede obtener?
- ¿Hay limitaciones para su desarrollo?

Este es el alcance del análisis Tiempo–Frecuencia.

Contenido

Condiciones

- Marginales y energía total.
- Funciones características.
- Promedios globales.
- Promedios locales.
- Invarianza al corrimiento en tiempo y frecuencia.
- Escalado lineal.
- Soporte finito.
- Principio de incertidumbre.

Marginales y energía total

- Sumando la distribución de energía para todas las frecuencias en un tiempo dado debería darnos la energía instantánea.

$$\int P(t,\omega)\, d\omega = |s(t)|^2$$

y consecuentemente

$$\int P(t,\omega)\, dt = |S(\omega)|^2$$

Marginales y energía total

- Sumando la distribución de energía para todas las frecuencias en un tiempo dado debería darnos la energía instantánea.

$$\int P(t,\omega)\,d\omega = |s(t)|^2$$

y consecuentemente

$$\int P(t,\omega)\,dt = |S(\omega)|^2$$

- La energía total de la distribución debe ser la energía total de la señal

$$E = \iint P(t,\omega)\,d\omega\,dt = \int |s(t)|^2\,dt = \int |S(\omega)|^2\,d\omega$$

Invarianza a Corrimientos en Tiempo y Frecuencia

$$\text{si} \quad s(t) \to s(t-t_0) \quad \text{entonces} \quad P(t,\omega) \to P(t-t_0,\omega)$$

$$\text{si} \quad S(\omega) \to S(\omega-\omega_0) \quad \text{entonces} \quad P(t,\omega) \to P(t,\omega-\omega_0)$$

Invarianza a Corrimientos en Tiempo y Frecuencia

$$\text{si} \quad s(t) \rightarrow s(t-t_0) \quad \text{entonces} \quad P(t,\omega) \rightarrow P(t-t_0,\omega)$$

$$\text{si} \quad S(\omega) \rightarrow S(\omega-\omega_0) \quad \text{entonces} \quad P(t,\omega) \rightarrow P(t,\omega-\omega_0)$$

$$\text{si} \quad s(t) \rightarrow e^{j\omega_0 t}s(t-t_0) \quad \text{entonces} \quad P(t,\omega) \rightarrow P(t-t_0,\omega-\omega_0)$$

Escalado Lineal

El espectro de una señal escalada es

$$S_{\mathrm{sc}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}} S(\omega/a) \qquad \text{si} \qquad s_{\mathrm{sc}}(t) = \sqrt{a}\, s(at)$$

$$P_{\mathrm{sc}}(t,\omega) = P(at, \omega/a)$$

Escalado Lineal

El espectro de una señal escalada es

$$S_{\mathrm{sc}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}} S(\omega/a) \qquad \text{si} \qquad s_{\mathrm{sc}}(t) = \sqrt{a}\, s(at)$$

$$P_{\mathrm{sc}}(t,\omega) = P(at, \omega/a)$$

Los marginales de la distribución escalada son

$$\int P_{\mathrm{sc}}(t,\omega)\, d\omega = a\left|s(at)\right|^2$$

$$\int P_{\mathrm{sc}}(t,\omega)\, dt = \frac{1}{a}\left|S(\omega/a)\right|^2$$

Soporte Finito

- Soporte finito débil

$$
\begin{aligned}
P(t,\omega) = 0 \quad &\text{para } t \text{ fuera de } (t_1, t_2), \quad \text{si } s(t) = 0 \;\text{ fuera de } (t_1, t_2) \\
P(t,\omega) = 0 \quad &\text{para } \omega \text{ fuera de } (\omega_1, \omega_2), \quad \text{si } S(\omega) = 0 \;\text{ fuera de } (\omega_1, \omega_2)
\end{aligned}
$$

Soporte Finito

- Soporte finito débil

$$P(t,\omega)=0 \quad \text{para } t \text{ fuera de } (t_1,t_2), \qquad \text{si } s(t)=0 \ \text{ fuera de } (t_1,t_2)$$
$$P(t,\omega)=0 \quad \text{para } \omega \text{ fuera de } (\omega_1,\omega_2), \qquad \text{si } S(\omega)=0 \ \text{ fuera de } (\omega_1,\omega_2)$$

- Soporte finito fuerte

$$P(t,\omega)=0 \quad \text{si } s(t)=0 \ \text{ para un tiempo en particular}$$
$$P(t,\omega)=0 \quad \text{si } S(\omega)=0 \ \text{ para una frecuencia en particular}$$

Principio de incertidumbre

De una distribución TF las desviaciones estándar se obtienen mediante

$$T^2 = \iint \big(t - \langle t\rangle\big)^2 P(t,\omega)\, dt\, d\omega$$

$$B^2 = \iint \big(\omega - \langle \omega\rangle\big)^2 P(t,\omega)\, dt\, d\omega$$

Principio de incertidumbre

De una distribución TF las desviaciones estándar se obtienen mediante

$$T^2 = \iint \big(t - \langle t\rangle\big)^2 P(t,\omega)\, dt\, d\omega$$
$$B^2 = \iint \big(\omega - \langle \omega\rangle\big)^2 P(t,\omega)\, dt\, d\omega$$

El teorema de duración–ancho de banda implica

$$BT \geq \tfrac{1}{2}$$

Promedios locales

La frecuencia promedio local en el tiempo t es

$$\langle \omega \rangle_t = \frac{\displaystyle\int \omega P(t,\omega)\, d\omega}{\displaystyle\int P(t,\omega)\, d\omega} = \frac{1}{P(t)} \int \omega P(t,\omega)\, d\omega = \mathrm{IF}(t)$$

y el ancho espectral en t es

$$\sigma^2_{\omega|t} = \frac{1}{P(t)} \int \big(\omega - \langle \omega \rangle\big)^2 P(t,\omega)\, d\omega$$

Promedios locales

La frecuencia promedio local en el tiempo t es

$$\langle\omega\rangle_t = \frac{\displaystyle\int \omega P(t,\omega)\, d\omega}{\displaystyle\int P(t,\omega)\, d\omega} = \frac{1}{P(t)} \int \omega P(t,\omega)\, d\omega = \mathrm{IF}(t)$$

y el ancho espectral en t es

$$\sigma^2_{\omega|t} = \frac{1}{P(t)} \int \big(\omega - \langle\omega\rangle\big)^2 P(t,\omega)\, d\omega$$

- Los promedios locales $\langle t\rangle_\omega$ y $\sigma^2_{t|\omega}$ se pueden obtener de forma análoga.

Promedios locales

La frecuencia promedio local en el tiempo t es

$$\langle\omega\rangle_t = \frac{\displaystyle\int \omega P(t,\omega)\,d\omega}{\displaystyle\int P(t,\omega)\,d\omega} = \frac{1}{P(t)}\int \omega P(t,\omega)\,d\omega = \mathrm{IF}(t)$$

y el ancho espectral en t es

$$\sigma^2_{\omega|t} = \frac{1}{P(t)}\int \big(\omega - \langle\omega\rangle\big)^2 P(t,\omega)\,d\omega$$

- Los promedios locales $\langle t\rangle_\omega$ y $\sigma^2_{t|\omega}$ se pueden obtener de forma análoga.
- Todos los promedios locales propocionan información importante de la localización de la energía en el espacio tiempo–frecuencia.

Contenido

Desafíos

- ¿Cómo construir distribuciones TF que satisfacen la condiciones (suaves) mencionadas?

Desafíos

- ¿Cómo construir distribuciones TF que satisfacen la condiciones (suaves) mencionadas?
- Desde un punto de vista matemático, ¡hay un número infinito de distribuciones que satisfacen estos requerimientos!

Desafíos

- ¿Cómo construir distribuciones TF que satisfacen la condiciones (suaves) mencionadas?
- Desde un punto de vista matemático, ¡hay un número infinito de distribuciones que satisfacen estos requerimientos!
- Pero, obtener una expresión explícita no es tan fácil.

Desafíos

- ¿Cómo construir distribuciones TF que satisfacen la condiciones (suaves) mencionadas?
- Desde un punto de vista matemático, ¡hay un número infinito de distribuciones que satisfacen estos requerimientos!
- Pero, obtener una expresión explícita no es tan fácil.
- Por ejemplo, una forma sencilla sería

$$P(t, \omega) = \left| s(t) S(\omega) \right|^2$$

Desafíos

- ¿Cómo construir distribuciones TF que satisfacen la condiciones (suaves) mencionadas?
- Desde un punto de vista matemático, ¡hay un número infinito de distribuciones que satisfacen estos requerimientos!
- Pero, obtener una expresión explícita no es tan fácil.
- Por ejemplo, una forma sencilla sería

$$P(t,\omega) = \left|s(t)S(\omega)\right|^2$$

Cumple todos los requerimientos básicos: marginales, invarianza a corrimientos TF, escalado lineal, soporte finito fuerte, principio de incertidumbre, pero ...

Desafíos

Desafíos

- En cuanto a los promedios locales:

$$P(t,\omega) = \left|s(t)S(\omega)\right|^2$$

La frecuencia promedio local en el tiempo t es

$$\langle \omega \rangle_t = \frac{\displaystyle\int \omega P(t,\omega)\, d\omega}{\displaystyle\int P(t,\omega)\, d\omega} = \frac{1}{P(t)} \int \omega P(t,\omega)\, d\omega = \mathrm{IF}(t)$$

$$\langle \omega \rangle_t = \frac{|s(t)|^2}{P(t)} \int \omega |s(\omega)|^2\, d\omega \neq \mathrm{IF}(t)$$

Desafíos

- En cuanto a los promedios locales:

$$P(t,\omega) = \left|s(t)S(\omega)\right|^2$$

La frecuencia promedio local en el tiempo t es

$$\langle\omega\rangle_t = \frac{\displaystyle\int \omega P(t,\omega)\,d\omega}{\displaystyle\int P(t,\omega)\,d\omega} = \frac{1}{P(t)}\int \omega P(t,\omega)\,d\omega = \mathrm{IF}(t)$$

$$\langle\omega\rangle_t = \frac{|s(t)|^2}{P(t)}\int \omega|s(\omega)|^2\,d\omega \neq \mathrm{IF}(t)$$

los promedios locales son muy pobres!!!!