Práctico 3 - Número Complejo

1. Aritmética y representaciones

1. Determinar los valores de i^k para todo $k \in \mathbb{Z}$.
2. Expresar los siguientes números complejos en forma binómica y en notación polar.

   $a)\quad (1+i)^2 \qquad b)\quad \frac{1}{i} \qquad c)\quad \frac{1}{1+i} \qquad d)\quad (2+3i)(3-4i) \qquad e)\quad (1+i)(1-2i) \qquad f)\quad i^5+i^{16}$

   $g)\quad -1 \qquad h)\quad -3i \qquad i)\quad 1+i+i^2+i^3 \qquad j)\quad \frac{1}{2}(1+i)(1-i^{-8}) \qquad k)\quad \frac{1+i}{\sqrt{2}} \qquad l)\quad \frac{1}{(1+i)^2}$

3. Expresar en notación binómica:

   $a)\quad e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad b)\quad 3e^{\pi i} \qquad c)\quad \frac{1-e^{\frac{\pi}{2}i}}{1+e^{\frac{\pi}{2}i}} \qquad d)\quad (i+1)^{100}$

4. Probar que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

   $a)\quad |z_1| = |\bar{z}_1| \qquad b)\quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad c)\quad |z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad d)\quad \text{si } z_1 \neq 0 \quad \left|\frac{1}{z_1}\right| = \frac{1}{|z_1|}$

2. Geometría y funciones

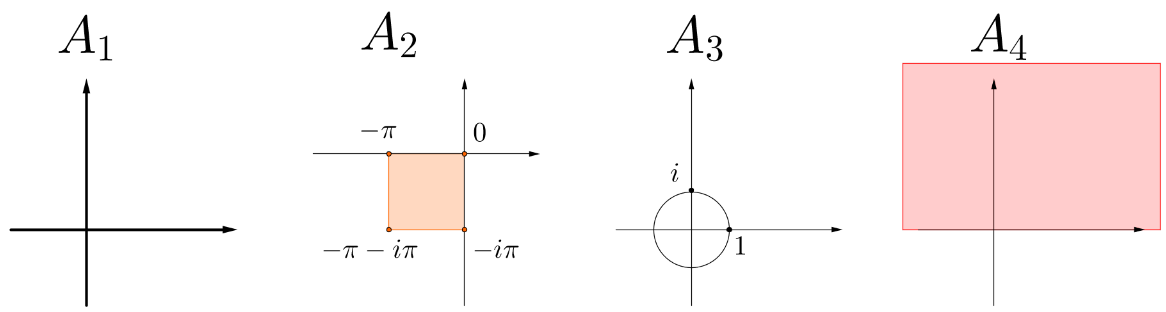
1. Representar geométricamente los números de los ejercicios 2 y 3 de la parte anterior.
2. Representar geométricamente los complejos:

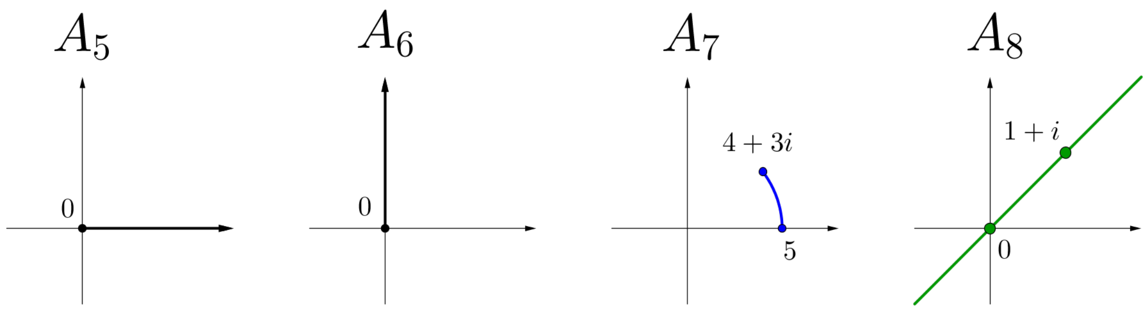
   $a)\quad (1+i)^n-(1-i)^n, \quad n \in \mathbb{N} \qquad b)\quad \sqrt[5]{1} \qquad c)\quad \sqrt[10]{i} \qquad d)\quad \sqrt[6]{8(\sqrt{3}-i)}$

3. Encontrar, en cada caso, el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen las siguientes condiciones, y representar geométricamente.

   $a)\quad |z|>1 \qquad b)\quad z-\overline{z}=1 \qquad c)\quad |z-i|=|z+i| \qquad d)\quad Im(z)<2 \qquad e)\quad |z-\bar{z}| = 2\,Re(z-1)$

4. En este ejercicio se estudiara la imagen y preimagen de algunas funciones a determinados conjuntos. Los conjuntos que consideraremos son:





a) Estudiar y bosquejar $f(A_i)$ en los siguientes casos

1) Para la función $f(z) = z + (1+i)$, los conjuntos A_1 $\forall i \in \{1,\ldots,8\}$
2) Para la función $f(z) = \bar{z}$, los conjuntos A_1 $\forall i \in \{1,\ldots,8\}$
3) Para la función $f(z) = z^2$, los conjuntos A_1 $\forall i \in \{1,\ldots,8\} \setminus \{2\}$
4) Para la función $f(z) = z^5$, los conjuntos A_1 $\forall i \in \{1,\ldots,8\} \setminus \{2\}$
5) Para la función $f(z) = e^z$, los conjuntos A_1, A_2, A_4, A_5, A_6
6) En esta caso el domino es $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, para la función $f(z) = \frac{1}{z}$, los conjuntos $D \cap A_1$ $\forall i \in \{1,\ldots,8\}$

b) Repetir la parte anterior estudiando preimagen en vez de imagen. ¿Cual es la preimagen de $\{0\}$ de la función $f(z) = e^z$?

5. *a*) Una función $f: X \to Z$ entre dos espacios con distancia se dice que es una isometría si es biyectiva y preserva las distancias, es decir, $\forall x, y \in X$ se cumple que distancia entre x e y es igual a la distancia entre $f(x)$ y $f(y)$.

   En este caso trabajaremos con funciones de $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, por tanto la condición de ser isometría es

   - la función f biyectiva
   - para todo par de puntos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se cumple que $\mid z_1 - z_2 \mid = \mid f(z_1) - f(z_2) \mid$

   Probar que las siguientes funciones $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son isometrias

   1) $f(z) = z + a$
   2) $f(z) = \bar{z}$
   3) $f(z) = \omega z$ donde $\omega \in \mathbb{C}$ y $\mid \omega \mid = 1$
   4) Dada una función $f: X \to X$, un punto $z \in X$ es fijo si $f(z) = z$. Calcular para funciones de la parte anterior el conjunto de puntos fijos.

3. Polinomios

1. Sea $A = \left\{ \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \right)^n \ / \ n \in \mathbb{N} \right\}$. ¿Cuántos elementos tiene este conjunto de números complejos?

2. *a*) Probar que la ecuación $z^n = 1$ tiene n soluciones complejas, a estos números se los llama raíces de la unidad.

   b) Deducir que para todo $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la ecuación $z^n = \omega$ tiene n soluciones complejas.

   c) Bosquejar en el plano las raíces de la unidad para $n = 6$ y $n = 9$

   d) Las raíces enésimas de la unidad siempre tienen al numero 1. ¿Existen n y m tal que la única raíz de la unidad común sea 1?

3. En $\mathbb{C}$, se consideran $\{z_1, \cdots, z_8\}$ las raíces octavas de 2^8, es decir aquellas que cumplen $z_k^8 = 2^8$ para cada $k = 1, \cdots, 8$. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas:

a) $z_i = 2$ para todo $i = 1, \cdots, 8$.

b) Existen al menos dos raíces z_j, z_k tales que $z_j = -z_k$.

c) Existen al menos dos raíces z_l, z_m tales que $\bar{z_l} = z_m$.

d) Se cumple $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 = 2^8$.

4. Sea $P(z)$ un polinomio *con coeficientes reales*.

   a) Probar que $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

   b) Probar que si $z_0 = a + ib$ es raíz de $P(z)$, entonces $\overline{z_0} = a - ib$ también es raíz de $P(z)$.

   c) Concluir que si $a + ib$ con $b \neq 0$ es raíz de $P(z)$, entonces $P(z)$ es divisible por el polinomio a coeficientes reales $Q(z) = z^2 - 2az + a^2 + b^2$.

   d) Demostrar que si $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$ es una raíz de orden r de $P(z)$, es decir $P(z)$ es divisible por el polinomio $R(z) = (z - (a + ib))^r$, entonces $a - ib$ también es raíz de $P(z)$ de orden r. Concluir, en estas hipótesis con $b \neq 0$, que $P(z)$ es divisible por el polinomio a coeficientes reales $Q(z) = (z^2 - 2az + a^2 + b^2)^r$.

   e) Sabiendo que $3 + \sqrt{2}i$ es raíz del polinomio $P(z) = z^4 - 8z^3 + 21z^2 - 10z - 22$ encontrar todas las raíces y factorear el polinomio según lo demostrado en las partes anteriores (*descomposición factorial en el cuerpo de los reales*).

5. Considere el polinomio $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$. Sabiendo que $P(z)$ tiene una raíz imaginaria pura halle todas sus raíces.

4. Modelos

1. En este ejercicio estudiaremos circuitos eléctricos de corriente alterna. Notaremos $I(t)$ a la intensidad.

   Tomemos primero el modelo simple de la figura

   El hecho de que la FEM otorgue corriente alterna implica que su diferencia de voltajes esta dada por una función senoidal $V(t) = \sin(\omega t + k)$, donde ω es algún número positivo. A ω se le denomina frecuencia angular de la corriente alterna, mientras que k es el desfasaje.

   La impedancia eléctrica es la oposición al flujo de la corriente eléctrica de cualquier circuito.

   La impedancia en un modelo simple, un resistor, un condensador y una inductancia es de la siguiente forma

   $$Z = Z_R + (X_L - X_C)i$$

   y por tanto la magnitud de la impedancia Z es

   $$|Z| = \sqrt{Z_R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

   donde

   - La impedancia dada por la resistencia es $Z_R = R$
   - La impedancia dada por el condensador es $X_C = \frac{I}{C\omega}$, siendo C la capacidad que tiene el cuerpo para almacenar carga
   - La impedancia dada por inductor eléctrico es $X_L = L\omega I$, siendo L la magnitud de la oposición que tiene el cuerpo a los cambios de corriente

Por supuesto que si alguno de los elementos no esta en el circuito su inductancia sera 0.

Por otro lado, la inductancia actúa de igual forma que las resistencias en las conexiones en serie y paralelo, esto es

- Para una conexión en serie $Z_{eq} = Z_1 + Z_2$
- Para una conexión en paralelo $\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$

De esta forma se simplifica el hecho de trabajar con Z, como complejo y una vez hecho todos los cálculos hallar $| Z |$.

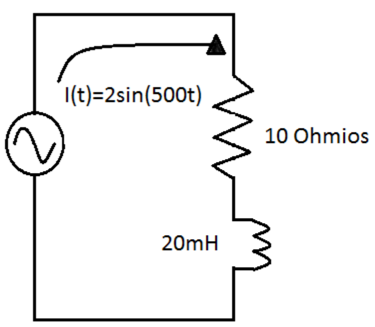
Una idea leve de por que la formula es la siguiente.

- Debido a la Ley de Ohm (V = RI) el voltaje y la corriente en un resistor tienen la misma corriente angular.
- En un capacitor el voltaje y la corriente tienen un desfasaje de $-\frac{\pi}{2}$ radiantes.
- En un inductor la frecuencia angular tiene un desfasaje es de $\frac{\pi}{2}$

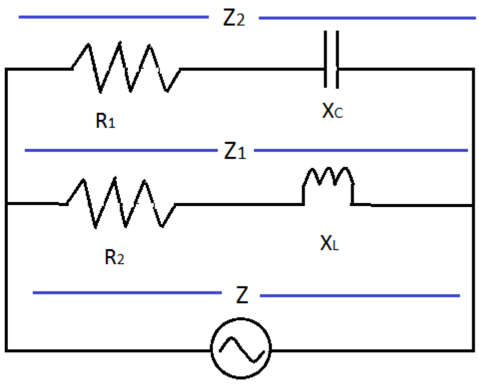
Se cumple además que el argumento de Z es el ángulo de desfasaje entre la corriente y el voltaje, dando un nuevo motivo para trabajar con Z como número complejo.

a) En el circuito del ejemplo 1 circula una corriente de $I(t) = 2\sin(500t)A$ (Amperio). Obtener la magnitud de la impedancia equivalente del circuito y el ángulo de desfasaje entre la corriente y el voltaje.

b) Del circuito en paralelo mostrado en el ejemplo 2, obtener la impedancia total Z si $R_1 = 2\omega$, $R_2 = 6\omega$, $X_C = 4\omega$ y $X_L = 4\omega$



Ejemplo 1



Ejemplo 2

Referencia (Breve introducción a los números complejos y sus aplicaciones a la electricidad - Alejandro Dominguez)

5. Ejercicios Complementarios

1. Probar que la fórmula de Bhaskara es válida para polinomios complejos.

2. Probar que no se le puede dar un orden a los números complejos.

3. Recordar que para todo $z \in \mathbb{C}$ $\exists \omega \in \mathbb{C}$ tal que $\omega^2 = z$. Discuta sobre posibles definiciones de una función raíz cuadrada, esto es f que cumpla que $f(z)^2 = z$. ¿Qué problemas identifica en f?

4. Se define el *seno y coseno complejos* mediante

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

a) Probar que las funciones seno y coseno complejas extienden a las funciones seno y coseno reales, en el sentido de que coinciden para $z \in \mathbb{R}$.

b) Probar que $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

c) Probar que $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$ y $\cos(-z) = \cos z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

d) Hallar los ceros en el plano complejo de las funciones seno y coseno.