Primer parcial de Lógica

8 de Mayo 2015

Indicaciones generales

- Apagar los celulares
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos)

Considere el siguiente conjunto BIN de los números binarios:

I $0 \in BIN$.

II $1 \in BIN$.

III $0\omega \in BIN$ si $\omega \in BIN$.

IV $1\omega \in BIN$ si $\omega \in BIN$.

a. Defina inductivamente el conjunto $BINL \subset BIN \times \mathbb{N}$, tal que el natural es la cantidad de dígitos del número binario menos 1.

b. De un elemento de $BIN \times \mathbb{N}$ que pertenezca a $BINL$ y otro que no. (No es necesario demostrar la pertenencia (o no) del elemento al conjunto).

c. Defina por recursión primitiva la función $f : BINL \to \texttt{PROP}$ tal que si en la posición i (comenzando en 0) del número hay un 0, entonces en el resultado aparece $\neg p_i$ y si hay un 1, entonces en resultado aparece p_i y todos estos átomos están relacionados con $\wedge$. Ej: $f(\langle 110, 2\rangle) = (p_2 \wedge (p_1 \wedge \neg p_0))$.

d. Defina por recursión primitiva la función $g : BINL \to \texttt{PROP}$ tal que si en la posición i (comenzando en 0) del número hay un 0, entonces en el resultado aparece p_i y si hay un 1, entonces en resultado aparece $\neg p_i$ y todos estos átomos están relacionados con $\vee$. Ej: $g(\langle 110, 2\rangle) = (\neg p_2 \vee (\neg p_1 \vee p_0))$

e. Demuestre por inducción la siguiente propiedad: $\bar{\forall}\langle \omega, n\rangle \in BINL,\ \models f(\langle \omega, n\rangle) \vee g(\langle \omega, n\rangle)$.

Ejercicio 2 (10 puntos)

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, **justificando por mecanismos semánticos**.

a. Si $\alpha \models \gamma$ y $\beta \models \gamma$ entonces $\alpha \vee \beta \models \gamma$

b. Si $\alpha \vee \beta \models \gamma$ entonces $\alpha \models \gamma$ y $\beta \models \gamma$

c. $\not\models (p_0 \vee p_1) \leftrightarrow p_2$

d. $p_0 \to (p_1 \vee p_2), \neg p_1 \models p_0 \to p_2$

Ejercicio 3 (10 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $\vdash ((\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta \to \gamma)$

b. $\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \gamma)$

En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Ejercicio 4 (10 puntos)

Considere el siguiente conjunto $\Gamma = \{p_0, p_1\}$

a. Pruebe que $\neg p_2 \notin Cons(\Gamma)$.

b. Construya una teoría T consistente que cumpla las siguientes condiciones:

- $Cons(\Gamma) \subset T$
- $\neg p_2 \in T$
- T no es consistente maximal.

Justifique su respuesta.

c. Construya un conjunto consistente maximal Δ_0 tal que $T \subset \Delta_0$.

d. Construya un conjunto consistente maximal Δ_1 tal que $\Gamma \subset \Delta_1$ pero $T \not\subseteq \Delta_1$.

e. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

   I. $\Delta_0 \cup \Delta_1$ es teoría.

   II. $\Delta_0 \cup \Delta_1$ es consistente.

Justifique su respuesta.