Primer parcial de Lógica

11 de Mayo 2013

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos)

Considere la siguiente definición inductiva para el lenguaje L sobre el alfabeto $\{c_0, c_1, c_2, \ldots\} \cup \{\#, @,), (\}$.

I Si $i \in \mathbb{N}$ entonces $c_i \in L$

II Si $t_1 \in L, t_2 \in L, t_3 \in L$, entonces $((t_1 \# t_2) @ t_3) \in L$

a. Demuestre que $((((c_1 \# c_1) @ c_2) \# c_2) @ c_2) \in L$.

b. Defina una función F tal que para cada elemento de L devuelve una palabra de $\mathtt{PROP}$ realizando los siguientes reemplazos; cada $\#$ cambia por $\wedge$, cada @ por $\rightarrow$, y cada c_i por la letra p_i. La definición de F debe cumplir con el esquema de recursión primitiva.

c. Demuestre que $(\bar{\forall} \alpha \in L)((\bar{\exists} v)(v(F(\alpha)) = 1))$.

d. Indique si las siguientes oraciones son verdaderas o falsas. Justifique o de un contraejemplo según corresponda.

  I. Hay alguna palabra de L tal que F la transforma en tautología.

  II. $(\bar{\forall} \alpha \in L)((\bar{\exists} v)(v(F(\alpha)) = 0))$.

Ejercicio 2 (10 puntos)

a. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones

  I. $(\bar{\forall} \varphi \in \mathtt{PROP})((\bar{\exists} \psi \in \mathtt{PROP})(\models \varphi \vee \psi))$.

  II. $(\bar{\exists} \varphi \in \mathtt{PROP})((\bar{\forall} \psi \in \mathtt{PROP})(\not\models \varphi \leftrightarrow \bot \text{ y } \models \varphi \rightarrow \psi))$.

b. Sea

  - $\varphi_0 = p_0$
  - $\varphi_{n+1} = (\varphi_n \vee \neg p_0)$

  I. Demuestre que $(\bar{\forall} n \in \mathbb{N})(\models \varphi_{n+1})$.

  II. Considere $\Gamma = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$. De ψ tal que $\Gamma \models \psi$ cumpliendo que $\psi \notin \Gamma$ y $\not\models \psi$.

Ejercicio 3 (10 puntos)

a. Complete el siguiente árbol de forma tal que sea un elemento de `DER` que justifique la siguiente afirmación:
$\vdash \neg(\alpha \wedge \beta) \to \neg\alpha \vee \neg\beta$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\qquad\qquad \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\qquad\qquad \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\alpha \wedge \beta) \quad \dfrac{\alpha \quad \beta}{\qquad}\,{\scriptstyle I??}}{\perp}\,{\scriptstyle E\neg}}{\qquad}\,{\scriptstyle I??}}{\qquad}\,{\scriptstyle ??}}{\perp}\,{\scriptstyle E\neg}}{\neg\alpha}\,{\scriptstyle I??}}{\qquad}\,{\scriptstyle I\vee}}{\qquad}\,{\scriptstyle E??}}{\neg\alpha \vee \neg\beta}\,{\scriptstyle ??}}{\neg(\alpha \wedge \beta) \to \neg\alpha \vee \neg\beta}\,{\scriptstyle I\to}
$$

b. Construya una derivación que justifique la siguiente afirmación:

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\neg\psi \vee \neg\varphi$$

c. A partir de lo demostrado en las partes anteriores y sabiendo que se cumple:

$$\neg\varphi, \neg\alpha \vee \neg\beta \vdash \sigma$$

Demostrar que:

I. $\neg\varphi \vdash \neg(\alpha \wedge \beta) \to \sigma$
II. $(p_0 \to p_1) \to \neg p_1 \vdash \neg\neg\neg p_1 \vee \neg(p_0 \to p_1)$

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas

Ejercicio 4 (10 puntos)

Dados los siguientes conjuntos:

- $\Gamma_m(k) = \{p_i : i \text{ es múltiplo de } k\}$
- $\Gamma_{nm}(k) = \{\neg p_i : i \text{ no es múltiplo de } k\}$

a. Demuestre que

I. $(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})(\Gamma_m(k) \nvdash \perp)$
II. $(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})(\Gamma_{nm}(k) \nvdash \perp)$
III. $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N})(\text{si } i < j \text{ y } i > 0 \text{ entonces } \Gamma_m(i) \cup \Gamma_{nm}(j) \vdash \perp)$

b. Indique si se cumple la siguiente afirmación. Demuestre o dé un contraejemplo según corresponda.

$$(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})(\textsc{Cons}(\Gamma_m(k) \cup \Gamma_{nm}(k)) \text{ es consistente maximal.}$$