

Lógica

Primer parcial

Mayo 2006

Indicaciones Generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- Toda respuesta debe estar fundamentada. Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y número de estudiante, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Atención: Cada ejercicio está antecedido por una pregunta obligatoria marcada con un asterisco (*), la cual no tiene puntaje. Para que un ejercicio sea corregido, la pregunta obligatoria correspondiente al mismo debe ser contestada correctamente. O sea, si dicha pregunta no es contestada correctamente, el ejercicio en cuestión no se corregirá.

Ejercicio 1 (10 pts)

Pregunta * Sea $\Gamma \subseteq \{a, b\}^*$ el conjunto dado por la siguiente definición inductiva libre.

- i. $\epsilon \in \Gamma$
- ii. $\alpha \in \Gamma \Rightarrow baab \in \Gamma$

Enuncie el principio de inducción primitiva para Γ .

Sea $\Sigma = \{a, b\}$ un alfabeto. Considere la función $f : \Gamma \rightarrow \Sigma^*$ que intercambia en una palabra de Γ todas las ocurrencias de b y a . Por ejemplo: $f(bbabab) = ababab$.

1. Defina f de forma recursiva.
2. Pruebe por inducción que para toda $w \in \Gamma$, w tiene el doble de ba s que $f(w)$.

Ejercicio 2 (10 pts)

Pregunta * Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y $\alpha \in PROP$. Defina $\Gamma \models \alpha$.

Indique cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos. Justifique.

- i. $\Gamma \models \alpha \wedge \beta \iff \Gamma \models \alpha$ y $\Gamma \models \beta$
- ii. $\Gamma \models \alpha \vee \beta \iff \Gamma \models \alpha$ o $\Gamma \models \beta$
- iii. $\Gamma \models \alpha \vee \beta \rightarrow \beta \iff \Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$

Ejercicio 3 (10 pts)

Pregunta * Escriba la regla de eliminación de la disyunción (E_{\vee}).

1. Construya una derivación de $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$ a partir del siguiente árbol, cancelando las hipótesis que sea necesario y etiquetando adecuadamente las reglas.

$$\frac{\frac{\frac{\alpha}{\alpha \vee \neg\alpha} ? \quad \neg(\alpha \vee \neg\alpha) ?}{\frac{\perp}{\alpha \vee \neg\alpha} ?} ?}{\frac{\perp}{\alpha \vee \neg\alpha} ?} ?$$

2. Construya una derivación para probar que $\neg\beta \rightarrow \gamma, \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma \vdash \gamma$. Si lo desea, puede utilizar la derivación de la parte 1.

Ejercicio 4 (10 pts)

Sea $P = \{p_i / i \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de las letras proposicionales. Para cada $I \subseteq \mathbb{N}$ considere el conjunto

$$\mathcal{L}(I) = \{p_i / i \in I\} \cup \{\neg p_i / i \notin I\}$$

Pregunta * Pruebe que $\mathcal{L}(\{2\}) \cup \{p_0\}$ es inconsistente.

Pruebe que para todo $I \subseteq \mathbb{N}$, $CONS(\mathcal{L}(I))$ es consistente maximal.