Lógica

Primer Parcial

Mayo 2005

Indicaciones Generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40 puntos**
- Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso. En esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Toda respuesta debe estar fundamentada.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad.
- Utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz.
- Iniciar cada ejercicio en hoja nueva.
- Poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Atención : Cada ejercicio está antecedido por una **pregunta obligatoria** marcada con una estrella (*), la cual no tiene puntaje. Para que un ejercicio sea corregido, la pregunta obligatoria correspondiente al mismo debe ser contestada correctamente. O sea, si dicha pregunta no es contestada correctamente, el ejercicio en cuestión no se corregirá.

Problemas

Ejercicio 1 (9 puntos)

Considere el alfabeto $\Sigma = \{a..z\}$ y la siguiente definición inductiva del lenguaje LEN:

i. $\varepsilon \in$ LEN

ii. Si $v \in \{a, e, i, o, u\}$ y $\beta \in$ LEN entonces $v\beta v \in$ LEN

iii. Si $c \in \Sigma - \{a, e, i, o, u\}$, $v \in \{a, e, i, o, u\}$ y $\beta \in$ LEN entonces $\beta c v \in$ LEN

Pregunta (*) Pruebe, utilizando la definición anterior, que *amelia* $\in$ LEN.

---

a) Defina las siguientes funciones por recursión primitiva:

voc: LEN $\rightarrow$ N la cual, dada $\alpha \in$ LEN, cuenta la cantidad de ocurrencias de letras vocales en α.

con: LEN $\rightarrow$ N la cual, dada $\alpha \in$ LEN, cuenta la cantidad de ocurrencias de letras consonantes en α.

Ejemplos: **voc** (amelia) = 4 y **con** (amelia) = 2.

b) Demuestre por inducción que para toda $\alpha \in$ LEN se cumple que **voc**(α) $\geq$ **con**(α).

Ejercicio 2 (10 puntos)

Pregunta (*) Considere la proposición $(p \rightarrow q) \vee (r \wedge q)$. Dé una valuación que muestre que no es una tautología.

Sean p_1 una letra proposicional y $\alpha, \beta \in$ PROP dos proposiciones que cumplen las siguientes condiciones: $\alpha \models \neg\beta$ y $\models p_1 \rightarrow \alpha$.

Para cada una de las siguientes afirmaciones, determine si es correcta o no. En caso afirmativo demuéstrela y en caso negativo presente un contraejemplo y justifique.

a) β *eq* $\perp$

b) $\models \neg(p_1 \wedge \beta)$

c) $\models (\alpha \rightarrow p_1)\ [(\neg p_1 \vee \neg\beta) / p_1]$

Ejercicio 3 (10 puntos)

Pregunta (*) Enuncie las dos reglas de *introducción del* $\vee$ ($\vee_I$).

a) Sea Γ un subconjunto arbitrario de PROP y sean $\alpha, \beta \in$ PROP tales que $\Gamma \vdash \alpha$. Demuestre que: $\Gamma \cup \{\neg(\alpha \vee \beta)\} \vdash \perp$

b) Sean α y β fórmulas cualesquiera de PROP. Construya una derivación de:

$$(\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta) \vdash \neg(\alpha \leftrightarrow \beta)$$

Todo paso de la derivación debe estar justificado con el nombre de la regla empleada. En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Ejercicio 4 (11 puntos)

Pregunta (*) Pruebe que el conjunto $\{ p \wedge \neg p \}$ es inconsistente.

a) Sea $\Delta = \{ (p_i \to p_j) \mid i < j \}$.

1. Demuestre que Δ es consistente.
2. ¿$\Delta \cup \{ p_{100} \}$es consistente maximal? Justifique su respuesta.

b) Sean $\Gamma, \Delta \subseteq PROP$. Para cada una de las siguientes afirmaciones, determine si es correcta o no. En caso afirmativo demuéstrela y en caso negativo presente un contraejemplo y justifique.

1. Si Γ es consistente y $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces Δ es consistente.
2. Si Δ es consistente y $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces Δ es consistente.
3. Si $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$ entonces $Cons(\Gamma) \cap Cons(\Delta) \neq Cons(\varnothing)$.