Lógica
Primer Parcial
Mayo 2004

Indicaciones Generales
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40 puntos**
- Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Toda respuesta debe estar fundamentada.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y número de cédula.
- Utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz.
- Iniciar cada ejercicio en hoja nueva.
- Poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Cada ejercicio está antecedido por una **pregunta obligatoria** *marcada con un asterisco (*), la cual no tiene puntaje. Para que un ejercicio sea corregido, la pregunta obligatoria correspondiente al mismo debe ser contestada correctamente. O sea, si dicha pregunta no es contestada correctamente, el ejercicio en cuestión no se corregirá.*

Problemas

Ejercicio 1. (10 pts.)

Pregunta * *Defina inductivamente el conjunto $PROP_{\vee,\perp}$ como el lenguaje de cálculo proposicional con infinitas letras proposicionales $p_i (i \in N)$, y los conectivos $\perp$ y $\vee$.*

(a) Enuncie el principio de inducción primitiva para $PROP_{\vee,\perp}$.

(b) Defina recursivamente una función $f : PROP_{\vee,\perp} \rightarrow N$ que calcula la cantidad de ocurrencias de letras proposicionales en una fórmula $\alpha \in PROP_{\vee,\perp}$.
Ejemplos:
$f((p_1 \vee (p_2 \vee p_1))) = 3$
$f(((p_1 \vee p_2) \vee \perp)) = 2$.

(c) Demuestre por inducción primitiva que para cualquier fórmula $\alpha \in PROP_{\vee,\perp}$ se cumple que α es una contradicción si y sólo si $f(\alpha) = 0$.

Ejercicio 2. (10 pts.)

Pregunta * *Defina* $\Gamma \models \alpha$, *para* $\Gamma \subseteq PROP$ *y* $\alpha \in PROP$.

Sean α, β y $\gamma \in PROP$ tales que:

- $\models \alpha \vee \beta$
- $\beta \models \gamma$

Indicar si son ciertas o no las siguientes afirmaciones. En caso afirmativo, demuestre la afirmación, en caso negativo dé un contraejemplo y justifique.

(a) $\models \alpha$ ó $\models \beta$

(b) $\models \neg\alpha \rightarrow \gamma$

(c) $\neg\gamma \models \alpha$

Ejercicio 3. (10 pts.)

Pregunta * *Defina* $\Gamma \vdash \alpha$, *para* $\Gamma \subseteq PROP$ *y* $\alpha \in PROP$.

(a) Sean $\Gamma \subseteq \Delta \subseteq PROP$ y $\alpha \in PROP$. Probar que si $\Delta \nvdash \alpha$ entonces $\Gamma \nvdash \alpha$.

(b)
1. Construir una derivación para: $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
2. Construir una derivación para: $(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$
3. De los incisos anteriores, concluya que: $\vdash \neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

En este ejercicio se le solicitan derivaciones y no se aceptarán justificaciones basadas en consideraciones semánticas.
Todos los pasos de las derivaciones deberán justificarse con el nombre de la regla empleada, y para cada hipótesis cancelada deberá indicarse en qué paso de la derivación ella se cancela.

Ejercicio 4. (10 pts.)

Pregunta * *Defina conjunto consistente maximal.*

Sea $\Gamma \subseteq PROP$. Se define $\Gamma^{\#} = \{\neg\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$.

(a) Indicar si son ciertas o no las siguientes afirmaciones. En caso afirmativo, demuestre la afirmación, en caso negativo dé un contraejemplo y justifique.
1. Si Γ es consistente, entonces $\Gamma^{\#}$ es consistente.
2. Si Γ es consistente, entonces $\Gamma^{\#}$ es inconsistente.
3. $Cons(\Gamma) = Cons((\Gamma^{\#})^{\#})$

(b) Demuestre que si Γ es consistente maximal entonces $\Gamma^{\#}$ es inconsistente.