

# Lógica Primer Parcial

Junio 2001

## Indicaciones Generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40 puntos**.
- Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Toda respuesta debe estar fundamentada.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad.
- Utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz.
- Iniciar cada ejercicio en hoja nueva.
- Poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

## Problemas

### Ejercicio 1. (6 pts.)

Defina la función  $\#$  que calcula la cantidad de reglas empleadas en una derivación  $D \in DER$ .

### Ejercicio 2. (10 pts.)

Sea  $PROP^*$  el subconjunto de  $PROP$  con sólo los conectivos  $\vee, \wedge, \neg$  y  $\perp$ . Se define la función  $neg : PROP^* \rightarrow PROP^*$  de la siguiente forma:

$$neg(\alpha) = \neg\alpha, \text{ si } \alpha \text{ es atómica.}$$

$$neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = neg(\alpha_1) \vee neg(\alpha_2)$$

$$neg(\alpha_1 \vee \alpha_2) = neg(\alpha_1) \wedge neg(\alpha_2)$$

$$neg(\neg\alpha) = \neg(neg(\alpha))$$

Pruebe que para toda  $\alpha \in PROP^*$  se cumple  $neg(\alpha) \text{ eq } \neg(\alpha)$

**Ejercicio 3.** (10 pts.)

Sean  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  tres fórmulas de  $PROP$  y  $\Gamma \subseteq PROP$  un conjunto de fórmulas.

Indique si las siguientes afirmaciones son correctas o incorrectas. Justifique su respuesta para los casos en que ésta sea afirmativa, y dé un contraejemplo si su respuesta es negativa.

- (a) Si  $\alpha \models \gamma$  y  $\beta \models \gamma$ , entonces  $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \models \gamma$ .
- (b) Si  $\alpha \models \gamma$  y  $\models \beta \vee \gamma$ , entonces  $\models \alpha \rightarrow \neg\beta$ .
- (c) Si  $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$  y  $\Gamma \models \neg\alpha \rightarrow \beta$ , entonces  $\Gamma \models \beta$ .

**Ejercicio 4.** (6 pts.)

Construya una derivación de  $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \wedge \alpha \vdash \beta$ .

**Ejercicio 5.** (8 pts.)

Considere  $\Gamma \subseteq PROP$ .

Recuerde las siguientes definiciones:

- $Cons(\Gamma) = \{\varphi \in PROP \text{ tal que } \Gamma \vdash \varphi\}$
- $\Gamma$  es una *teoría* ssi es cerrado bajo derivación (esto es, si  $\Gamma \vdash \varphi$  entonces  $\varphi \in \Gamma$ .)

Demuestre las siguientes afirmaciones :

- (a) Para todo conjunto  $\Gamma$  se cumple que  $Cons(\Gamma)$  es una *teoría*.
- (b) Si  $Cons(\Gamma)$  es *consistente* entonces  $\Gamma$  es *consistente*.