Instituto de Computación **Facultad de Ingeniería**

Lógica
Primer Parcial
Mayo 2000

Indicaciones Generales
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40 puntos**
- Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Toda respuesta debe estar fundamentada.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad.
- Utilizar las hojas de un solo lado. Escribir con lápiz.
- Iniciar cada ejercicio en hoja nueva.
- Poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Problemas

Ejercicio 1. (12 pts.) Considere $PROP$ definido con los conectivos $\{\bot, \to, \wedge\}$ y sea $PROP_{\#}$el lenguaje proposicional formado con los conectivos $\{\bot, \to, \wedge, \#\}$, agregando a las cláusulas de la definición de $PROP$ la siguiente:

> *#) Si φ, ψ, y σ están en $PROP_{\#}$, entonces $\#(\varphi, \psi, \sigma)$ también está en $PROP_{\#}$.*

La semántica de este nuevo conectivo # se define como:

$v(\#(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = 1$ *si y sólo si* $v(\varphi_1) \leq v(\varphi_2) \leq v(\varphi_3)$.

(a) Demuestre que $\#(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ $\texttt{eq}$ $(\varphi_1 \to \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \to \varphi_3)$.

(b) Defina recursivamente una función $\tau : PROP_{\#} \to PROP$ tal que en $\tau(\varphi)$ no aparece ningún conector # y φ $\texttt{eq}$ $\tau(\varphi)$.

(c) Demuestre por inducción en $PROP_{\#}$que la función τ definida en la parte anterior satisface la propiedad deseada: *para todo* $\varphi \in PROP_{\#}$ *se cumple* φ $\texttt{eq}$ $\tau(\varphi)$.

Ejercicio 2. (10 pts.)

Sean Γ y Δ incluidos en $PROP$ tales que $\Delta \subseteq \Gamma$, y sean φ y ψ fórmulas de $PROP$ tales que $\Gamma \models \varphi \vee \psi$ y $\Delta \models \neg\varphi$.

A partir de estas hipótesis, ¿ puede inferir las siguientes afirmaciones ?

(a) $\Gamma \models \psi$

(b) $\Delta \models \psi$

(c) $\Delta \cup \{\varphi\} \models \psi$

Justifique su respuesta para los casos en que ésta sea afirmativa, y dé un contraejemplo si su respuesta es negativa.

Ejercicio 3. (8 pts.)

Construya una derivación de $\varphi \to (\sigma \vee \psi) \vdash \neg\sigma \to (\varphi \to \psi)$.

Ejercicio 4. (10 pts.)

Decimos que dos conjuntos de $PROP$ Γ y Δ son *derivacionalmente equivalentes* (y notamos $\Gamma \equiv_D \Delta$) si y sólo si se cumple que:

$\Gamma \vdash \varphi$ *sii* $\Delta \vdash \varphi$, *para todo* $\varphi \in PROP$.

1. Dé dos conjuntos distintos Γ y Δ tales que $\Gamma \equiv_D \Delta$. Justifique su respuesta.
2. Demuestre que si $\Gamma \equiv_D \Delta$ entonces $Cons(\Gamma) \equiv_D \Delta$.
3. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y cuáles no. De ser correctas dé una demostración, y de no serlo construya un contraejemplo.
   (a) Si $\Gamma \equiv_D \Delta$ y Γ es consistente, entonces Δ es consistente.
   (b) Si Γ y Δ son inconsistentes, entonces $\Gamma \equiv_D \Delta$.
   (c) Si $\Gamma \not\equiv_D \Delta$ y Γ es inconsistente, entonces Δ es consistente.