Primer parcial de Lógica

17 de Mayo 2014

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos)

a. Defina una función $cantConectivos : \mathtt{PROP} \to \mathbb{N}$ que cuente la cantidad de ocurrencias de conectivos en una formula.

b. Defina una función $f : \mathtt{PROP} \to \mathtt{PROP}$ tal que $f(\alpha)$ es equivalente a α, no tiene los conectivos $\vee$ ni $\to$, y $cantConectivos(f(\alpha)) \geq cantConectivos(\alpha)$.

   Observación No es necesario probar que la función f cumple las propiedades pedidas.

c. Calcule $f(p_0 \vee p_1)$ y $f(\neg(\neg p_0 \wedge \neg p_1))$

d. Recordando que se cumple la propiedad:
   $(\bar{\forall}\varphi \in PROP)(cantConectivos(f(\varphi)) \geq cantConectivos(\varphi))$

   Demuestre que:

   $(\bar{\forall}\varphi \in PROP)(\text{si } \varphi \neq f(\varphi) \text{ entonces } cantConectivos(f(\varphi)) > cantConectivos(\varphi))$

   Justifique su respuesta.

e. ¿Existe alguna función $g : \mathtt{PROP} \to \mathtt{PROP}$ tal que $g(f(\varphi)) = \varphi$? Justifique su respuesta.

Ejercicio 2 (10 puntos)

a. Dado $\varphi \in \texttt{PROP}$ y una valuación v_1, ambos fijos, donde además se sabe que $v_1(\varphi) = 0$.

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas, falsas o no se puede afirmar nada. Justifique sus respuestas.

I. $v_1(\varphi \to (p_1 \vee p_2)) = 1$

II. $\varphi \models \bot$.

III. Existe $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$ tal que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \varphi \wedge (p_1 \to p_1)$

b. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

I. $p_0 \to (\neg p_0 \wedge \neg\bot),\quad p_0 \models \quad p_3$

II. $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})((\bar{\exists}\psi \in \texttt{PROP})(\not\models \varphi \leftrightarrow \psi$ y $\varphi \models \psi))$

III. $\not\models p_1 \leftrightarrow (p_1 \to p_1)$ y $p_1 \models p_1 \to p_1$

Ejercicio 3 (10 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios. En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

a. $(\alpha \to \beta) \to \gamma \vdash \gamma \vee \neg\beta$

b. $\vdash (\alpha \leftrightarrow (\beta \to \gamma)) \to (\neg\alpha \wedge \beta \to \neg\gamma)$

Ejercicio 4 (10 puntos)

a. Dé una teoría consistente. Justifique su respuesta.

b. Demuestre que si Γ es una teoría inconsistente entonces $\Gamma = \texttt{PROP}$.

c. Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si es verdadera o falsa, justificando en cada caso.

I. Para todo Γ y Δ subconjuntos consistentes de $\texttt{PROP}$, $\Gamma \cup \Delta$ es consistente.

II. Para todo Γ y Δ subconjuntos de $\texttt{PROP}$, si Γ es consistente y Δ es inconsistente, entonces $\Gamma \cap \Delta$ es consistente.