Primer parcial de Lógica

Mayo 2011

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos)

Sea $\mathcal{L} \subseteq \mathtt{PROP}$ con la siguiente definición inductiva:

I $p_i \in \mathcal{L}$

II Si $\alpha \in \mathcal{L}$ entonces $p_i \to \alpha \in \mathcal{L}$

a. Defina recursivamente la función $Le : \mathcal{L} \to 2^P$, donde P es el conjunto de las letras proposicionales, tal que dado un elemento α de $\mathcal{L}$ devuelve el conjunto de las letras proposicionales que ocurren en α.

Por ejemplo: $Le(p_1 \to p_3 \to p_1) = \{p_1, p_3\}$

b. Defina recursivamente la función $Cant : \mathcal{L} \to \mathbb{N}$ tal que dado un elemento α de $\mathcal{L}$ devuelve la cantidad de ocurrencias de letras proposicionales en α.

Por ejemplo: $Cant(p_1 \to p_3 \to p_1) = 3$

c. Pruebe por inducción que:

$$(\forall \alpha \in \mathcal{L})(|Le(\alpha)| \leq Cant(\alpha))$$

d. Pruebe por inducción que:

$$(\forall \alpha \in \mathcal{L})(|Le(\alpha)| = Cant(\alpha) \Rightarrow (\exists v : \text{valuación})(v(\alpha) = 0))$$

Ejercicio 2 (10 puntos)

a. Indique si las siguentes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.
Para todo $\alpha, \beta \in \mathtt{PROP}$:

I. $(\forall \gamma \in \mathtt{PROP})(\alpha \to \beta \models (\gamma \to \beta) \to (\gamma \to \alpha))$
II. $(\exists \gamma \in \mathtt{PROP})(\alpha \to \beta \models (\gamma \to \beta) \to (\gamma \to \alpha))$
III. $(\forall \gamma \in \mathtt{PROP})(\alpha \to \beta \models (\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta))$

b. Indique si las siguentes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

I. $(\exists \gamma \in \mathtt{PROP})(\not\models \gamma \text{ y } \not\models \neg\gamma \text{ y } (\forall \alpha, \beta \in \mathtt{PROP})(\alpha \to \beta \models (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)))$
II. $(\exists \gamma \in \mathtt{PROP})(\not\models \gamma \text{ y } \not\models \neg\gamma \text{ y } (\forall \alpha, \beta \in \mathtt{PROP})((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma) \models \alpha \to \beta))$

Ejercicio 3 (10 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $\vdash ((\alpha \vee \beta) \to (\beta \wedge \neg\alpha)) \to \neg\alpha$

b. $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\neg\psi)$

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas

Ejercicio 4 (10 puntos)

Recuerde que un conjunto Γ es completo si y sólo si es consistente y para toda $\varphi \in \texttt{PROP}$ se cumple que $\Gamma \vdash \varphi$ o $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Sea $\Gamma = \{p_0 \vee p_i : i \in \mathbb{N} \text{ e } i > 0\}$.

a. ¿Es Γ consistente? Justifique.

b. Demuestre que Γ no es un conjunto completo.

c. De un conjunto $\Delta \subseteq \texttt{PROP}$ finito tal que $\Gamma \cup \Delta$ sea completo. Justifique.