

Primer parcial de Lógica

Mayo 2008

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- Toda respuesta debe estar fundamentada. Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y número de estudiante, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos)

Considere el alfabeto $\Sigma = \{a, e, i, o, u, (,)\}$ la siguiente definición inductiva de Δ :

1. $a \in \Delta$
2. Si $w \in \Delta$, entonces $ewu \in \Delta$
3. Si $\{w, w'\} \subseteq \Delta$, entonces $o(w)i(w') \in \Sigma$

Pregunta *. ¿La palabra $o(a)i(a)$ pertenece al lenguaje Δ ? Justifique.♣

1. Tomando en cuenta que la definición de Δ es libre, defina por recursión primitiva una función $F : \Delta \rightarrow \{1, 2, 3\}^*$ que cambia cualquier vocal por 1, '(' por 2 y ')' por 3.
2. Recuerde que el recorrido de F es el conjunto $\{F(w) : w \in \Delta\}$. Defina inductivamente un conjunto B que sea ese recorrido.
3. Pruebe por inducción que toda palabra de B es la imagen de alguna palabra de Δ por la función F . Es decir,

$$(\forall \alpha \in B)(\exists w \in \Delta)F(w) = \alpha.$$

Ejercicio 2 (8 puntos)

Pregunta *. ¿Es cierto que $p_0 \models p_1$? Justifique.♣

Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y justifique su respuesta.

1. Para cualquier par de proposiciones φ y ψ ,

$$\models \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \neg\psi)$$

2. Para cualquier par de proposiciones φ y ψ ,

$$\models (\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \neg\psi)$$

Ejercicio 3 (8 puntos)

Pregunta *. Sea $\varphi \in PROP$. Defina $\vdash \varphi$.♣

Construya una derivación que justifique el siguiente juicio.

$$\vdash (\varphi \rightarrow \sigma) \wedge (\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\neg\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow \sigma.$$

Ejercicio 4 (14 puntos)

Pregunta *. Defina cuando un conjunto Γ es consistencia maximal.♣

Considere el siguiente conjunto de proposiciones.

$$\Gamma = \{p \rightarrow q \wedge r, \quad r \rightarrow s \wedge t, \quad u \rightarrow p\}.$$

Considere además el conjunto de todas las proposiciones de Γ negadas.

$$\bar{\Gamma} = \{\neg\varphi : \varphi \in \Gamma\}.$$

Indique si las afirmaciones siguientes son correctas o no. Justifique en cada caso.

1. $\text{Cons}(\Gamma)$ es consistente maximal.
2. Hay un conjunto de fórmulas proposicionales Δ tal que $\text{Cons}(\Gamma) \cap \text{Cons}(\Delta) = \emptyset$.
3. Hay una valuación v tal que $(\bar{\forall}\varphi \in \Gamma)v(\varphi) = 0$
4. $\bar{\Gamma}$ es consistente.