Optimización bajo Incertidumbre
3. Valoración del riesgo

Carlos Testuri – Germán Ferrari

Departamento de Investigación Operativa – Instituto de Computación
Facultad de Ingeniería – Universidad de la República

2003-2022

Contenido

Riesgo

La toma de decisiones bajo incertidumbre implica riesgos.

Correr riesgos implica exponerse a beneficios o pérdidas cualificables o cuantificables.

La percepción del riesgo varía según las personas, instituciones y sociedades.

Debido a su subjetividad, representar y gestionar el riesgo es un desafío.

Lotería de San Petersburgo (paradoja)

Es un juego de azar en el que se lanza repetidamente una moneda hasta que sale “cara” por primera vez, lo cual termina el juego.

Un jugador gana \$2 si la cara aparece en la primer tirada, o gana \$4 si la cara aparece en la segunda tirada, o en general gana $\$2^k$ si la cara aparece en la tirada k-ésima.

¿Cuánto se esta dispuesto a pagar por participar del juego?
Se gana \$2 con probabilidad $\frac{1}{2}$, si la cara aparece en la primer tirada; en general se gana $\$2^k$ con probabilidad $\frac{1}{2^k}$ si la cara aparece en la tirada k-ésima.
¿Cuánto vale la esperanza de la ganancia? R.: $2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + ... = \infty$.

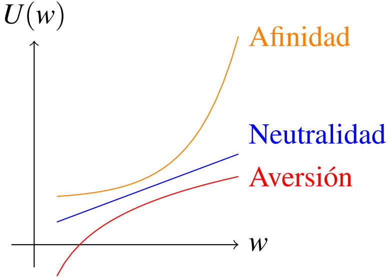
¿Se debería participar a cualquier precio?
Existe “discrepancia” entre lo que están dispuestos a pagar los jugadores y la esperanza infinita.

Función de utilidad

Es una medida de la *preferencia relativa* por cierto nivel de activo.

Si la utilidad sobre el activo varía con respecto a este a tasa:

- decreciente: se tiene *aversión* al riesgo,
- constante: se tiene *neutralidad* frente al riesgo,
- creciente: se tiene *afinidad* por el riesgo.



Función de utilidad esperada: ejemplo (1/2)

Dada la cantidad de un activo, w_0, se enfrenta la decisión de invertirla en un proyecto que implica dos resultados excluyentes y equiprobables: aumentar o disminuir el activo en δ.

¿Qué decisión tomar?

Una posibilidad es evaluar el cambio de la función de utilidad al ponderar la decisión.

Función de utilidad esperada: ejemplo (2/2)

Dada la función de utilidad con aversión al riesgo $U(w) = \ln(w)$.
La utilidad inicial $U_0 = \ln(w_0)$.
La utilidad final (esperada) en caso de participar del proyecto es

$$U_f = \frac{1}{2}U(w_0 - \delta) + \frac{1}{2}U(w_0 + \delta) = \frac{1}{2}\ln(w_0 - \delta) + \frac{1}{2}\ln(w_0 + \delta).$$

Si se comparan la utilidad inicial con la final: $U_0 - U_f$

$$\approx 2(U_0 - U_f) = 2\left(\ln(w_0) - \frac{1}{2}\left(\ln(w_0 - \delta) + \ln(w_0 + \delta)\right)\right)$$

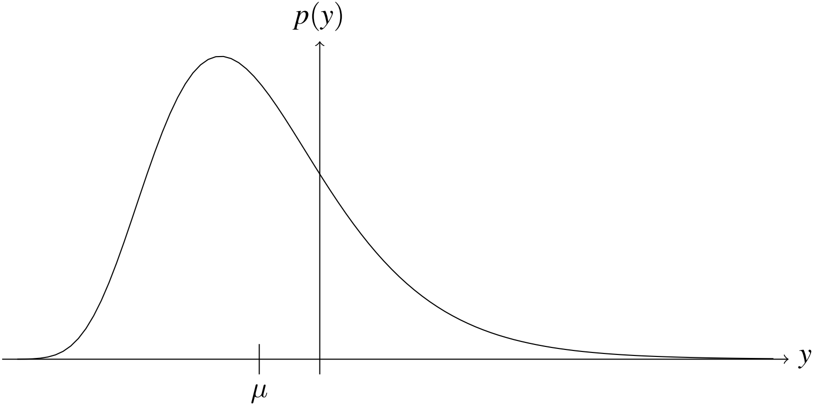
$$= 2\ln(w_0) - \ln(w_0 - \delta) - \ln(w_0 + \delta) = \ln\left(\frac{w_0^2}{w_0^2 - \delta^2}\right) > 0.$$

Dado que $U_0 - U_f > 0$: no se participa en el proyecto.

Valoración de riesgo mediante cuantiles

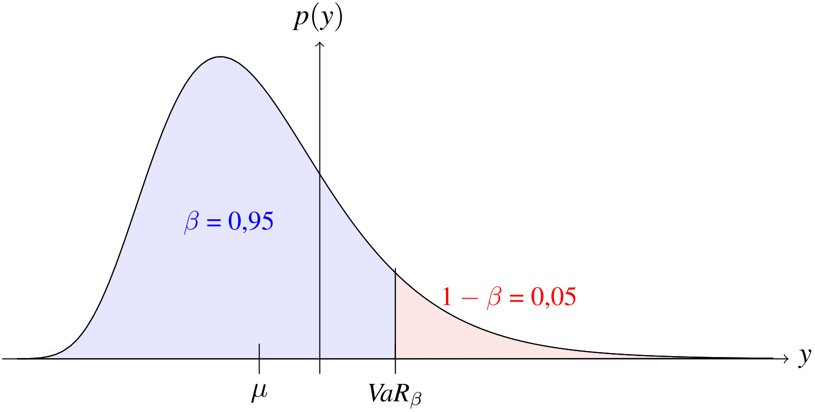
Sea la variable aleatoria $y \in \mathbb{R}$, con función de densidad de probabilidad $p(y)$ y media $\mu = \int y p(y) \mathrm{d}y$.

A modo de ejemplo, y puede representar una medida de pérdida con distribución asimétrica positiva,



Valor en riesgo (VaR)

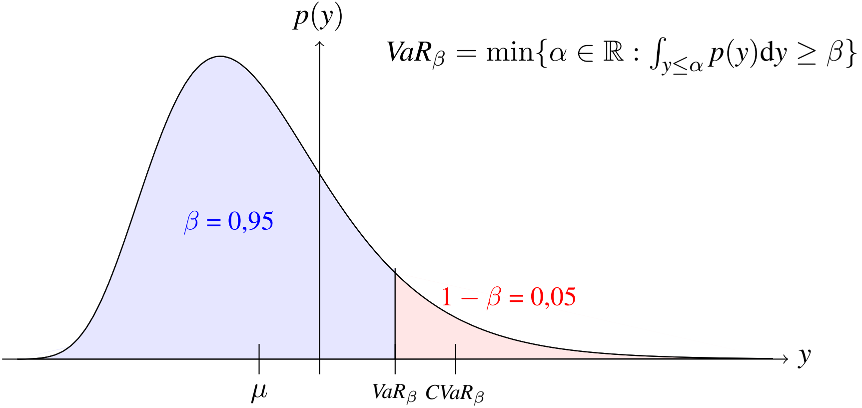
Se define VaR_β como el cuantil de la variable y para cierto orden $\beta \in (0, 1)$ de probabilidad. En el ejemplo,



Como problema de optimización: $VaR_\beta = \min\{\alpha \in \mathbb{R} : \int_{y \leq \alpha} p(y)\mathrm{d}y \geq \beta\}$.
Es el menor valor α que, con probabilidad β, las pérdidas no lo exceden.

Valor en riesgo condicional (CVaR)

Se define *CVaR* como la esperanza de valores de la variable mayores que *VaR*



El valor en riesgo condicional es $CVaR_\beta = \frac{1}{1-\beta}\int_{y \ge VaR_\beta} yp(y)\mathrm{d}y$.
Es la esperanza condicional de pérdidas superiores a VaR_β.

Cálculo de VaR y CVaR para una función cuantil

Sea $f(x, y)$ la pérdida asociada a la decisión $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ y la variable aleatoria $y \in \mathbb{R}^m$. Para cada x, la pérdida $f(x, y)$ es una variable aleatoria inducida en y.

Los valores VaR_β y CVaR_β de $f(x, y)$ para x dado, con orden de probabilidad β se definen como $\alpha_\beta(x)$ y $\phi_\beta(x)$, respectivamente,

$$\alpha_\beta(x) = \min\{\alpha \in \mathbb{R} : \int_{f(x,y)\leq\alpha} p(y)\mathrm{d}y \geq \beta\}$$

y

$$\phi_\beta(x) = \frac{1}{1-\beta} \int_{f(x,y)\geq\alpha_\beta(x)} f(x, y)p(y)\mathrm{d}y.$$

Cálculo de VaR y CVaR para una función cuantil

Se busca caracterizar $\alpha_\beta(x)$ y $\phi_\beta(x)$ a partir de la función

$$F_\beta(x,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_{y\in\mathbb{R}^m}[f(x,y)-\alpha]^+ p(y)\mathrm{d}y.$$

Proposición

$F_\beta(x,\alpha)$ es una función de convexa y continuamente diferenciable de α. El valor CVaR$_\beta$ asociado con $x \in X$ puede determinarse según

$$\phi_\beta(x) = \min_{\alpha\in\mathbb{R}} F_\beta(x,\alpha).$$

El intervalo de sus soluciones óptimas es $A_\beta(x) = Argmin_{\alpha\in\mathbb{R}} F_\beta(x,\alpha)$. El valor VaR$_\beta$ es

$$\alpha_\beta(x) = \text{ es el menor elemento de } A_\beta(x).$$

Cálculo de VaR y CVaR para una función cuantil

Proposición

Minimizar el CVaR$_\beta$ de la pérdida asociada con $x \in X$ es equivalente a minimizar $F_\beta(x, \alpha)$ sobre $(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R}$,

$$\min_{x \in X} \phi_\beta(x) = \min_{(x,\alpha) \in X \times \mathbb{R}} F_\beta(x, \alpha),$$

donde el par (x^*, α^*) es solución óptima del miembro derecho, si y solo si x^* es la solución del miembro izquierdo y $\alpha^* \in A_\beta(x^*)$. En particular, cuando el intervalo $A_\beta(x)$ se reduce a un punto, la solución del miembro derecho, (x^*, α^*), es tal que x^* minimiza CVaR$_\beta$ y α^* representa el VaR$_\beta$ correspondiente.

Si $F_\beta(x, \alpha)$ es convexa con respecto a (x, α), y $\phi_\beta(x)$ es convexa con respecto a x, cuando $f(x, \alpha)$ es convexa con respecto a x, en dicho caso, si X es un conjunto convexo, el problema de minimización es una instancia de programación convexa.

Cálculo mediante muestreo de VaR y CVaR para una función cuantil

La integral en la definición de $F_\beta(x, \alpha)$ puede aproximarse mediante muestreo de la distribución de probabilidad de y. Si se tiene un muestreo equiprobable de valores $y_1, ..., y_q$, entonces una aproximación de $F_\beta(x, \alpha)$ es

$$\tilde{F}_\beta(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{q(1-\beta)} \sum_{k=1}^{q} [f(x, y_k) - \alpha]^+.$$

$\tilde{F}_\beta(x, \alpha)$ es una función convexa y lineal a trazos de α.
Por lo que se puede evaluar mediante programación lineal.

[Rockafellar Uryasev, 1999]