Práctico 2
Lógica Proposicional

Ejercicio 1

Demuestre que:

a. $(((\neg p_2) \to (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \wedge (\neg p_3)) \in \texttt{PROP}$.
b. $((p_7 \to (\neg \bot)) \leftrightarrow ((p_4 \wedge (\neg p_2)) \to p_1)) \in \texttt{PROP}$.
c. $((\to \notin \texttt{PROP}$.

Ejercicio 2

a. Dibuje los árboles de las proposiciones del Ejercicio 1.
b. Determine a qué proposiciones corresponden los árboles de la Figura 1.

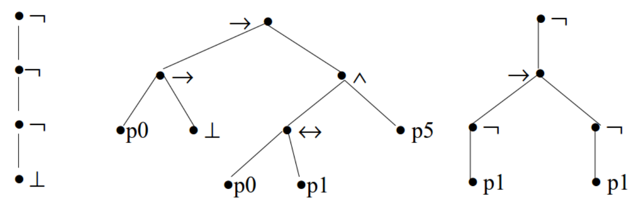

Figura 1: Árboles de proposiciones del Ejercicio 2.

Ejercicio 3

a. Dé por lo menos dos *secuencias de formación* de largo diferente para cada una de las proposiciones del Ejercicio 1.
b. Dé por lo menos dos secuencias de formación diferentes de largo mínimo para:
$((((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_2) \to p_1)$.

Ejercicio 4

Sea la siguiente propiedad:
Para toda φ subfórmula de ψ, φ ocurre en cualquier secuencia de formación para ψ.
Dé una prueba inductiva de la misma.

Ejercicio 5

a. Enumere todas las subfórmulas de las proposiciones del Ejercicio 2.
b. Defina la función $sub : \texttt{PROP} \to Pot(\texttt{PROP})$, que a cada proposición φ le asigna el conjunto $sub(\varphi)$ de sus subfórmulas.
c. Demuestre que la relación "ser subfórmula" de es transitiva.

Ejercicio 6

a. Considere una secuencia de formación $\varphi_1, ..., \varphi_n \equiv \psi$ de la fórmula ψ. Sea φ_i la fórmula de la secuencia que no es subfórmula de ψ, y que aparece más a la derecha en la secuencia. Pruebe que si elimina φ_i de la secuencia de formación dada, la secuencia resultante sigue siendo una secuencia de formación para ψ.
b. A partir del resultado anterior, demuestre que si φ ocurre en una secuencia de formación de largo mínimo para ψ entonces φ es una subfórmula de ψ.

Ejercicio 7

a. Defina una *función de rango* $r : \texttt{PROP} \to \mathbb{N}$ que dada una fórmula proposicional calcula la altura del árbol asociado a esa fórmula.
   Calcule el rango de las proposiciones del Ejercicio 1.
b. Defina una función $con : \texttt{PROP} \to \mathbb{N}$ tal que $con(\varphi)$ denota la cantidad de ocurrencias de conectivas en la fórmula φ.
   Calcule con para las proposiciones del Ejercicio 1.
c. Indique cual de las siguientes afirmaciones es correcta y cuál no, y en cada caso justifique su respuesta mediante la demostración:
   I. Para toda fórmula φ, $r(\varphi) \geq con(\varphi)$.
   II. Para toda fórmula φ, $r(\varphi) < con(\varphi)$.
   III. Para toda fórmula φ, $r(\varphi) \leq con(\varphi)$.

Ejercicio 8

a. Sea el conjunto $\mathscr{T} = \{\text{Tree}(\varphi) \mid \varphi \in \texttt{PROP}\}$ donde $\text{Tree}(\varphi)$ representa el árbol de φ. Escriba una definición inductiva de $\mathscr{T}$
b. Defina la función $|\_| : \mathscr{T} \to \mathbb{N}$ tal que $|\text{Tree}(\varphi)|$ sea la cantidad de nodos del árbol de φ.
c. Defina una función $\Omega : \texttt{PROP} \to \mathbb{N}$ tal que $\Omega(\varphi)$ sea la cantidad de átomos que ocurren en φ.
d. Considere la función sub del Ejercicio 5. Demuestre que $|sub(\varphi)| \leq |\text{Tree}(\varphi)|$.

Ejercicio 9

En este ejercicio usamos la función r del Ejercicio 7 y la función $|\_|$ del Ejercicio 8.

a. Defina inductivamente el lenguaje $\texttt{PROP}'$ incluído en $\texttt{PROP}$ tal que $\perp$ no aparece en ninguna palabra de $\texttt{PROP}'$.
b. Demuestre que, si $\varphi \in \texttt{PROP}'$, la cantidad de conectivas en φ **más** la cantidad de átomos de φ es igual a $|\text{Tree}(\varphi)|$.

c. Dada $\varphi \in \texttt{PROP}'$, demuestre que la cantidad de conectivas en φ **más** la cantidad de átomos de φ es menor o igual que $2^{r(\varphi)+1} - 1$.

Ejercicio 10 (Primer parcial, año 2012)

a. Defina inductivamente el lenguaje `PROP'` con alfabeto $\{p_0, p_1, \neg, \to,), (\}$, de forma que sea un subconjunto de `PROP`.

b. Considere la siguiente definición inductiva del lenguaje `POSF`:

   I. $p_0 \in \texttt{POSF}$
   II. $p_1 \in \texttt{POSF}$
   III. Si $\varphi \in \texttt{POSF}$, entonces $\varphi\neg \ \in \texttt{POSF}$
   IV. Si $\varphi \in \texttt{POSF}$ y $\psi \in \texttt{POSF}$, entonces $\varphi\ \psi \to \ \in \texttt{POSF}$

   Defina utilizando el esquema de recursión primitiva que corresponda una función invertible $f : \texttt{POSF} \to \texttt{PROP'}$ y su función inversa $f^{-1} : \texttt{PROP'} \to \texttt{POSF}$.

   La función f debe convertir una palabra de `POSF` en una fórmula proposicional con la misma cantidad de ocurrencias de cada letra proposicional y de cada conectivo. Por ejemplo:

$$f(p_0\neg\ p_0\ p_1 \to\ \to) = ((\neg p_0) \to (p_0 \to p_1))$$

c. Defina utilizando el esquema de recursión primitiva que corresponda otra función invertible $g : \texttt{POSF} \to \texttt{PROP'}$ (distinta de la anterior) y su inversa $g^{-1} : \texttt{PROP'} \to \texttt{POSF}$.

   La función g también debe convertir una palabra de `POSF` en una fórmula proposicional con la misma cantidad de ocurrencias de cada letra proposicional y de cada conectivo. Por ejemplo:

$$g(p_0\neg\ p_0\ p_1 \to\ \to) = ((p_1 \to p_0) \to (\neg p_0))$$

d. Demuestre por inducción que $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{POSF}) f^{-1}(g(\varphi)) = g^{-1}(f(\varphi))$.

e. Utilizando la parte anterior, demuestre que para todo φ y ψ en `POSF`, $f(\varphi) = g(\psi)$ si y sólo si $f(\psi) = g(\varphi)$.

Ejercicio 11

Muestre informalmente que no hay forma de ser miembro del club escocés si se respetan todas las reglas que se dieron en el teórico. Para ello, considere que sólo puede haber dos casos: que una persona sea escocesa o que sea extranjera.

Ejercicio 12

Según la ley 1865, todo mal ciudadano debe pagar una multa de 20 pesos al municipio. Para saber si una persona es mal ciudadano, hay un edicto que dice lo siguiente: *Son malos ciudadanos las personas que*

- *tiran basura a la calle*
- *ven una casa incendiándose y no avisan inmediatamente a los bomberos*

Determine si Ud. debe pagar los 20 pesos en cada una de las siguientes circunstancias. Trate de justificar informalmente el por qué de sus respuestas:

I. Ud. va paseando por la calle, compra un chocolate y tira el papel al suelo.

ii. Ud. va paseando por la calle, compra un chocolate y se guarda el papel en el bolsillo.

iii. Ud. compra un chocolate, llega a su casa y tira el papel al suelo de su cocina.

iv. Ud. va paseando por la calle, ve una casa incendiándose y corre a avisar a los bomberos.

v. Ud. va paseando por la calle, ve una casa incendiándose y se compra un chocolate.

vi. Ud. está en su casa y a 20 cuadras de ahí hay un incendio. Como Ud. ni se entera de ello, porque está comiéndose el chocolate, no avisa a los bomberos.

vii. Ud. va paseando por la calle, ve una casa que no está incendiándose, pero igual avisa a los bomberos.