Universidad de la República **Cálculo 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer semestre 2017**

Práctico 1 - Inducción y Número Real

1. Inducción

1.1. Inducción básica

1. Demostrar las siguientes afirmaciones usando el método de inducción completa:

   a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

   b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

   c) (Suma de cuadrados de impares) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

   d) (Desigualdad de Bernoulli) $(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \forall\, x > -1, \forall\, n \in \mathbb{N}$

   e) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, para todo $x \neq 1$

   f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

   g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}$ para todo $n > 1$

2. Probar sin usar inducción la fórmula $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

3. *a*) Sea b un entero positivo, entonces para cada $n \geq 0$ existen enteros no negativos Q y R tales que:

   $$n = Qb + R, \quad 0 \leq R < b.$$

   b) Sea $P \neq 0$ un polinomio de grado n entonces para cada polinomio S, existen polinomios Q y R tal que

   $$S = PQ + R \qquad \text{y} \qquad \text{grado}(R) < n$$

   c) Probar que en ambos casos Q y R son únicos bajo esas condiciones

4. Probar que la ecuación $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n+2}{2}$ cumple el paso inductivo para todo n sin embargo no se cumple para ningún n

5. Calcular el conjunto de los n que cumple la desigualdad $n^2 \leq 2^n$.

1.2. Geometría

En esta sección no se esperan pruebas con formalidad excesiva en los ejercicios, sino que se entienda los problemas geometricos y apartir de inducción completa dar algún boceto de las demostraciones.

1. *a*) Dado un segmento de longitud unidad, entonces el segmento de longitud $\sqrt{n}$ se puede construir con regla y compás para cada entero positivo n. (Sugerencia: ver como se construye el segmento de longitud $\sqrt{2}$.)

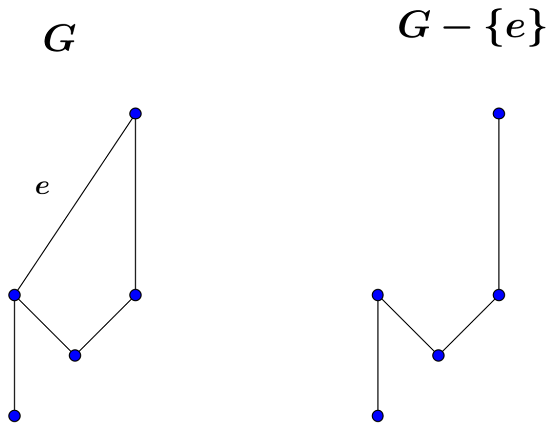
   b) Probar que con regla y compás se pueden obtener todos los angulos de la forma $\frac{\pi}{2^n}$

2. Se tienen n circunferencias en el plano. Demostrar que se puede pintar las regiones delimitadas por las circunferencias con 2 colores, de forma que dos secciones adyacentes sean de color distinto. ¿Vale lo mismo para cuadrados?

3. Grafos

   Un grafo consiste en una cantidad finita de puntos en el plano (llamado vértices), y algunos de los vértices estan conectados por curvas (llamadas aristas) las aristas siempre empiezan y terminan en dos vértices distintos y que dos aristas distintas no pueden compartir ambos vértices. Pedimos ademas que las aristas no se corten, es decir, que solo se pueden tocar en un vértice. Se puede dar una definición mas general, a estos tipos de grafos se los llama planares. La notación común para los vértices es v, w y v_i mientras que para las aristas es e y e_i

   a) Decimos que un grafo es conexo si para cualquier par de vertices hay un camino que los conectan. es decir, para todo par de vertices distintos v y w existen un conjunto de vértices v_i $i \in \{0,\ldots,k\}$ $v_0 = v$, $v_k = w$ y aristas e_j, $j \in \{1,\ldots,k\}$ tal que la arista e_j conecta los vértices v_{j-1} y v_j



      1) Probar que si un grafo de n vértices es conexo entonces tiene al menos $n-1$ aristas

      2) Probar que si un grafo conexo de n vertice tiene mas de $n-1$ aristas entonces se le puede quitar alguna de sus aristas de forma que siga siendo conexo. Deducir que si un grafo es conexo hay alguna forma de quitar aristas hasta que tenga $n-1$ y que el grafo resultante sea conexo.

   b) Dado un grafo podemos definir las caras del grafo como las regiones encerradas por el dibujo del mismo. Generalmente se nota f y f_i a las caras.

   Notamos la cantidad de caras como F, la cantidad de aristas como E y la cantidad de vértices como V.

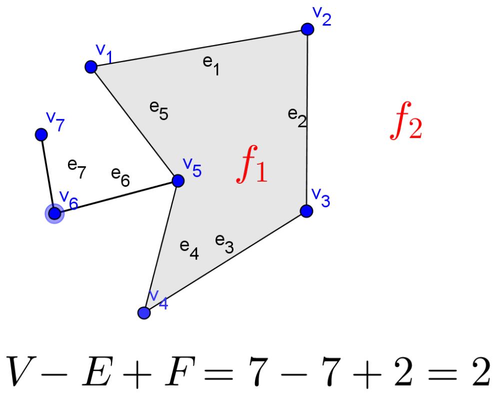


Figura 1: Delimitación de caras

Probar que $V - E + F = 2$. Sugerencia: discutir por componentes conexas.

1.3. Combinatoria y ordenes

1. TRIÁNGULO DE PASCAL

   El triángulo de Pascal, es un triángulo de números, infinito y definido por inducción.

   La primer fila contiene un unico número, que sera 1, y luego cada fila tendra un elemento más que la anterior.

   Notaremos $f(n,i)$ el valor del lugar i de la fila n. Para que tenga sentido debe ser $i \leq n$.

   La definición entonces es.

   - Paso base: $f(0,0) = 1$
   - Paso inductivo:
     - $f(n+1,0) = f(n+1,n+1) = 1$
     - Si $1 < i < n+1$, $f(n+1,i) = f(n,i) + f(n,i-1)$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Las primeras 5 filas del triángulo de Pascal

   a) Probar que

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i} f(i,n)$$

   b) Deducir que
   - $\sum_{i=0}^{n} f(i,n) = 2^n$
   - $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i f(i,n) = 0$

- $f(i,n) = f(n-i,n)$

c) Se define el número combinatorio $\binom{n}{i}$, donde $0 \le i \le n$ como $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$. Recordar que $0! = 1$

Probar que

$$\binom{n+1}{i+1} = \binom{n}{i+1} + \binom{n}{i}$$

Deducir que $f(i,n) = \binom{n}{i}$

d) Suponga que tiene una bolsa con n bolillas distinguidas, por ejemplo numeradas del 1 al n. Probar que $f(i,n)$ es la cantidad de maneras de tomar i boillas de las n.

2. Se desea hacer un programa que busque una palabra en un diccionario, para esto se necesitan hacer comparaciones hasta encontrarla. Dotaremos de un orden a las palabras, de forma que dadas dos palabras P y Q se tiene que P es menor a Q si aparece antes en el diccionario

   El proceso para comparar dos palabras es inductivo, Dadas dos palabras P y Q si la primer letra de de P aparece antes en el abecedario que la primer letra de Q entonces decimos que P es menor a Q (aparece antes en el diccionario).

   En caso de que la primer letra sea igual se comparan las segundas y así inductivamente.

   Si el proceso anterior no termino y llegamos a la última letra de alguna de las palabras, hay dos opciones o son la misma palabra o una palabras contiene más letras que la otra. En este último caso las palabra con más letras es la mayor.

   Ejemplos: Casa < Casas; Ave < Pez.

   A este órden se le llama órden lexicográfico.

   En este problema asumiremos que comparar 2 palabras cualesquiera tiene costo 1.

   Notemos n la cantidad de palabras del diccionario, P la palabra a buscar y $p(k)$ la función que indica el lugar del diccionario donde esta la palabra de la k-esima comparación Un programador ofrece dos programas A y B para solucionar el problema.

   A)
   - En el primer paso se compara con la palabra 1, es decir $p(1) = 1$, si es igual termina el programa, Sino se itera el paso inductivo.
   - En el paso k se compara con la k-esima palabra. Si es igual termina el programa sino compara con la siguiente.

   B)
   - En el primer paso se compara con la palabra que esta en el lugar $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, es decir $p(1) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ si es igual termina el programa, Sino se itera el paso inductivo.
   - Si en el paso $k-1$ la comparación dio que la palabra P es menor a la que esta en el lugar $p(k-1)$ entonces $p(k) = \left\lfloor p(k-1) - \frac{n}{2^k} \right\rfloor$. Si la comparación dio que la palabra P es mayor entonces $p(k) = \left\lceil p(k-1) + \frac{n}{2^k} \right\rceil$

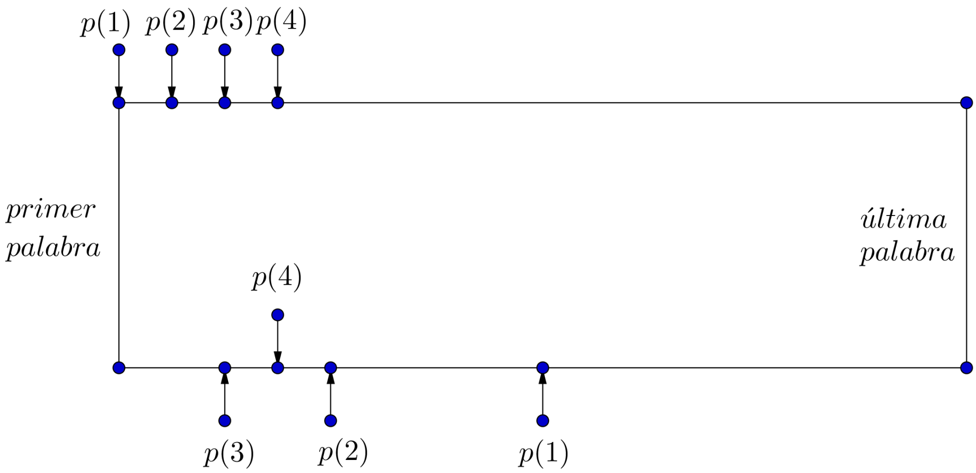


Figura 2: Iteraciones para encontrar la cuarta palabra en un diccionario de 17 palabras

a) Acotar aproximadamente el costo mínimo y máximo en cada caso.

b) Discutir sobre cual método sera más eficiente.

c) El diccionario de la RAE tiene aproximadamente 93111 palabras. ¿Cuál seria el costo en este caso?

d) En Uruguay hay 900.528 lineas de telefonía fija residencial (Informe Ursec 6/2015). Estimar el costo de ambos algoritmos.

3. Se tiene un conjunto A de n elementos con un orden pero que están desordenados

   Como ejemplo puede pensar en lo siguiente. Se quiere ordenar un mazo de barajas españolas sin comodines. Cada carta esta determinada por su palo y su número, por ejemplo (oro,2), (basto,10).

   Supongamos que se tiene el mazo desordenado y se quiere ordenar de la siguiente forma. Primero todas las de oro, después todas las de copa, luego todas las de espada y por último todas las de basto.

   Dar algoritmos para ordenarlos.

2. Número Real

1. Demostrar que $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ son irracionales. Sugerencia: para tratar $\sqrt{3}$, por ejemplo, usar que todo entero es de la forma $3n$ o $3n+1$ o $3n+2$.

   ¿Por qué no es aplicable esta demostración para $\sqrt{4}$?

2. *a*) Si a es racional y b es irracional, ¿es $a+b$ necesariamente irracional? ¿Y si a y b son ambos irracionales?

   b) Si a es racional y b es irracional, ¿es ab necesariamente irracional?

   c) ¿Existe algún número a tal que a^2 es irracional, pero a^4 racional?

   d) ¿Existen dos números irracionales tales que sean racionales su suma y su producto?

3. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demostrarla, si por el contrario es falsa dar un contraejemplo.

   a) $x < y \Rightarrow -x > -y$

   b) $x < y \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}$

   c) $x < y$ y $z < w \Rightarrow x + z < y + w$

   d) $x < y$ y $z < w \Rightarrow xz < yw$

4. Sea $S \subset \mathbb{N}$ un subconjunto de los naturales no vacío y acotado superiormente. Probar que el supremo de S pertenece a $\mathbb{N}$. ¿Se puede afirmar si es o no máximo?

5. Si x es un número real arbitrario, probar que existen enteros m y n tales que $m < x < n$.

6. Hallar supremos e ínfimos de los siguientes conjuntos y estudiar si son máximos o mínimos respectivamente:

   a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \cos \dfrac{n\pi}{2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ *b*) $B = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ *c*) $C = \left\{\dfrac{m}{n} : 0 < m < n,\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$

   d) $D = \{\theta : \cos(\theta) = \sin(\theta)\}$; $E = \{\cos(\theta) : \theta \in D\}$ *e*) $F = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{3x+1}{x-2} \leq 0\right\}$

7. En este práctico se consideran las definiciones geométricas de sin y cos sobre el círculo trigonométrico.

   Deducir mediante argumentos geométricos las siguientes acotaciones:

   a) $|\sin x| \leq |x|$ para todo $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
   b) $|\sin x| \leq |\pi - x|$ para todo $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.
   c) $|1 - \cos x| \leq |x|$ para todo $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
   d) $|1 + \cos x| \leq |\pi - x|$ para todo $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

8. Para los siguientes conjuntos, hallar el conjunto de las cotas superiores, el de las cotas inferiores. Hallar sus supremos, ínfimos, máximos y mínimos (si existen). Justificar.

   a) $\{\cos(n.\frac{\pi}{2}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
   b) $\{\cos(r) \mid r \in \mathbb{Q}\}$
   c) $\{\cos(\frac{1}{x}) \mid x \in]0,1[\cap \mathbb{Q}\}$. Sugerencia para (b) y (c): usar las acotaciones del ejercicio anterior. Recordar que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.
   d) $\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, m < n\}$.
   e) $\{\frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.
   f) $\{(-1)^n \frac{3-(1/n)}{2+(1/n)} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

9. *a*) Deducir mediante argumentos geométricos que $|\sin y - \sin x| \leq |y - x|$ para todo x e y en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
   b) Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $-1 < r < 1$. Sea $A = \{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mid \sin x < r\}$. Probar que existe $\alpha = \sup A$ y que $\sin \alpha = r$.

3. Ejercicios complementarios

1. Sea $P(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ un polinomio entero es decir a_k es entero para todo k.

   Probar que las raices reales de P son enteras o irracionales. Probar además que todas las raíces enteras son divisores enteros de a_0 (el término independiente)

2. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define $\alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$ y $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

   a) 1) Si $A \subset B$ y B es acotado demostrar que $\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$.
      2) Dar un ejemplo donde $A \subset B$, B acotado e $\inf(B) = \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$.
   b) 1) Si $a \leq b$, $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$, demostrar que $\sup(A) \leq \inf(B)$.
      2) Dar un ejemplo donde $a \leq b$, $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$, y $\sup(A) = \inf(B)$.
   c) 1) Probar que si A y B son acotados entonces $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$ y $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

2) Si $A = (0, 2]$ y $C = (0, 3]$, encontrar un conjunto B tal que $A + B = C$. Verificar con estos conjuntos A y B las igualdades demostradas en el item anterior.

d) 1) Probar que si A es acotado y $\alpha > 0$ entonces $\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$ e $\text{ínf}(\alpha A) = \alpha\, \text{ínf}(A)$.

2) Probar que si A es acotado y $\alpha < 0$ entonces $\sup(\alpha A) = \alpha\, \text{ínf}(A)$ e $\text{ínf}(\alpha A) = \alpha \sup(A)$.