Cálculo diferencial e integral en una variable

Examen – Julio de 2019

17 de julio de 2019

Nº Examen	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

Soluciones ejercicios de respuesta corta

1. El valor de $a \geq 0$ que hace que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x^2+ax+1) - \frac{x^2}{2} - ax}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

es:

Hallaremos el polinomio de McLaurin de grado 2 para $f(x) = \log(x^2+ax+1)$. En primer lugar $f(0) = 0$. Luego, $f'(x) = \frac{2x+a}{x^2+ax+1}$ y por lo tanto $f'(0) = a$. Además, $f''(x) = \frac{2(x^2+ax+1)-(2x+a)^2}{(x^2+ax+1)^2}$ y $f''(0) = 2 - a^2$. En conclusión, el polinomio de Taylor de grado 2 de f es $ax + (2-a^2)x^2/2$.
Utilizando dicho polinomio para calcular el límite tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x^2+ax+1) - \frac{x^2}{2} - ax}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(2-a^2)x^2/2 + r_2(x) - x^2/2}{x^2} = \frac{(1-a^2)}{2}.$$

Para que este límite de $-\frac{1}{2}$ se debe cumplir que $\frac{(1-a^2)}{2} = -\frac{1}{2}$ y $a = \sqrt{2}$

2. El valor de $a \geq 0$ que hace que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax^2 + (1-a)x) - (1-a)x - x^2}{x^2} = \pi$$

es:

Este ejercicio se resuelve igual que el de la otra versión. El valor a ingresar en la cajita en este caso es $a = \pi + 1$.

3. Una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{\cos^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ es:

Para obtener una primitiva realizamos en cambio de variable $u = \sqrt{x}$ con $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ y nos queda:

$$2\int \cos^2(u)du$$

Ahora, aplicando partes para $f(u) = cos(u)$, $f'(u) = -sen(u)$, $g(u) = sen(u)$ y $g'(u) = cos(u)$ y la igualdad $sen^2(x) = 1 - cos^2(x)$ obtenemos:

$$\int \cos^2(u)du = cos(u)sen(u) + u - \int \cos^2(u)du.$$

Despejando $2\int \cos^2(u)du$ y sustituyendo $u = \sqrt{x}$ concluimos que:

$$\int \frac{\cos^2\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx = \cos\left(\sqrt{x}\right)\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) + \sqrt{x} + c.$$

4. Una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(\log x)}{2x}$ es:

Este ejercicio es similar al de la otra versión. En la integral se hace el cambio de variable $u = \log(x)$, y la respuesta que se obtiene es

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2(\log x)}{2x}dx = \frac{1}{4}\left(\log(x) - \operatorname{sen}(\log(x))\cos(\log(x))\right) + c.$$

Soluciones ejercicios de desarrollo.

Ejercicio 1.

Se quiere diseñar un edificio con forma de prisma rectangular. Debe tener una altura de 3 m, y un volumen de 960 m^3. El techo y el piso se construirán de hormigón. Tres de las paredes también serán de hormigón, mientras que la cuarta se construirá de vidrio. El constructor cobra por metro cuadrado construido. Si el costo por metro cuadrado de vidrio es una vez y media el costo por metro cuadrado de hormigón, hallar las dimensiones del edificio que hacen que el costo de construcción sea mínimo.

El edificio a construir tendrá dimensiones $l \times a \times 3\,m^3$, siendo la pared de vidrio una de las de superficie $l \times 3\,m^2$. En hormigón hay que construir piso, techo, una pared de área $3l$ y dos paredes de área $3a$. La superficie total a construir en hormigón es por lo tanto igual a

$$2la + 6a + 3l.$$

La superficie de la pared de vidrio es $3l$. Por lo tanto el costo de la construcción es proporcional a

$$C(l, a) = 2la + 6a + 3l + \frac{3}{2}\cdot 3l = 2la + 6a + \frac{15}{2}l.$$

El volumen del edificio es $l \times a \times 3\,m^3 = 960\,m^3$, por lo que $l \times a = 320$, es decir, $l = \frac{320}{a}$. Entonces podemos expresar el costo de la construcción como

$$C(a) = 640 + 6a + \frac{2400}{a},$$

y queremos hallar el valor de $a > 0$ que minimiza esta cantidad.

Para esto, buscamos los valores de a para los cuales se anula $C'(a)$. Como $C'(a) = 6 - \frac{2400}{a^2}$, tenemos que

$$C'(a) = 0 \iff a^2 = 400 = 20^2$$

y $a = 20$. Para este valor de a, $l = \frac{320}{20} = 16$.

Para ver que este valor de a hace que $C(a)$ sea mínimo, estudiaremos el signo de $C'(a)$. Para $a \in (0, 20)$ $C'(a) < 0$ y para $a \in 20, +\infty)$ $C'(a) > 0$. Esto indica que C tiene un mínimo absoluto en $a = 20$.

Ejercicio 2.

(a) Demostrar que dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(a).f(b) < 0$, entonces f tiene al menos una raíz. Ver teórico (*b*) Probar que existe un $x \in \mathbb{R}$ que verifica:

$$x^{89} + \frac{300}{2 + x^4 + \cos^2(x)} = 543$$

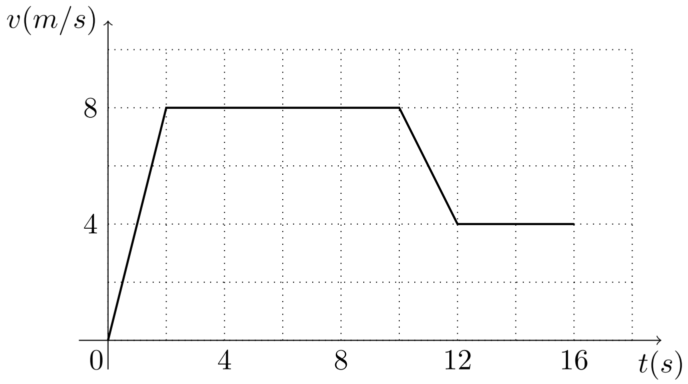
Para probar esto aplicaremos el teorema de Bolzano en

$$f(x) = x^{89} + \frac{300}{2 + x^4 + \cos^2(x)} - 543.$$

Como $\lim_{x\to+\infty} x^{89} + \frac{300}{2+x^4+\cos^2(x)} - 543 = +\infty$, existe $k_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(k_1) > 0$. De forma análoga, como $\lim_{x\to-\infty} x^{89} + \frac{300}{2+x^4+\cos^2(x)} - 543 = -\infty$, existe $k_2 \in \mathbb{R}^-$ tal que $f(k_2) < 0$. Como f es continua en $\mathbb{R}$ en particular lo es en $[k_2, k_1]$ y por el teorema de Bolzano podemos asegurar que f tiene una raíz lo que implica que la ecuación tiene una solución.

Ejercicio 3.

La figura representa la gráfica de una función continua $v : [0, 16] \to \mathbb{R}$. Es la función velocidad de un monopatín verde que pasó por la senda Nelson Landoni, que va desde Julio Herrera y Reissig hasta el Parque Rodó, pasando frente al Aulario.



(*a*) Hallar una partición P de $[0, 16]$ de modo que $S^*(v, P) - S_*(v, P) < 25$, justificando la respuesta.

Sea $P = \{0, 2, 10, 12, 16\}$.

$S^*(v, P) = sup(v, [0, 2]) \cdot 2 + sup(v, [2, 10]) \cdot 8 + sup(v, [10, 12]) \cdot 2 + sup(v, [12, 16]) \cdot 4$ y $S_*(v, P) = inf(v, [0, 2]) \cdot 2 + inf(v, [2, 10]) \cdot 8 + inf(v, [10, 12]) \cdot 2 + inf(v, [12, 16]) \cdot 4$. Por lo tanto

$S^*(v, P) - S_*(v, P) = (sup(v, [0, 2]) - inf(v, [0, 2])) \cdot 2 + (sup(v, [2, 10]) - inf(v, [2, 10])) \cdot 8 + (sup(v, [10, 12]) - inf(v, [10, 12])) \cdot 2 + (sup(v, [12, 16]) - inf(v, [12, 16])) \cdot 4 = 8 \cdot 2 + 0 \cdot 8 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 4 = 24 < 25$.

(*b*) ¿Qué distancia recorrió el monopatín?

La distancia recorrida por el monopatín, como función del tiempo t, es la primitiva de $v(t)$ que en $t = 0$ vale 0. Esto es $F(t) = \int_0^t v(s)\,ds$. Por lo tanto la distancia total recorrida es $\int_0^{16} v(s)\,ds$, es decir, el área bajo la gráfica de v. Descomponiendo esta área en figuras de área conocida (triángulos y rectángulos) vemos que la distancia recorrida es

$$\int_0^{16} v(s)\,ds = 100.$$

(c) Si el monopatín partió de Julio Herrera y Reissig en $t = 0$ y la puerta del Aulario está a 32 metros, ¿en qué instante t pasó por la puerta del Aulario?

Nota: $S^*(v, P)$ y $S_*(v, P)$ indican, respectivamente, la suma superior e inferior de la función v respecto a la partición P.

Buscamos un tiempo t para el cual $F(t) = \int_0^t v(s)\, ds = 32$. Calculando áreas como hicimos en la parte anterior, vemos que $t = 5$.