CDIV 2021 - SEGUNDO PARCIAL
SOLUCIÓN

Ejercicios de verdadero o falso

Ejercicio 1.

(1) Sea f continua en $[a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$ y $A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. Si $f(b) > 0$ entonces $f(\sup A) = 0$.
(2) Sea f continua en $[a, b]$ con $f(a)f(b) < 0$ y $A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. Entonces $f(\sup A) = 0$.

(1) **VERDADERO:** Ver teórico (demostración del Teorema de Bolzano)
(2) **FALSO:** Un contraejemplo es considerar la función $f(x) = -x$ en el intervalo $[a, b] = [-1, 1]$. Tenemos que f continua en $[a, b]$ con $f(a)f(b) = f(-1)f(1) = -1 < 0$, $\sup A = 1$, y $f(1) = -1 \neq 0$.

Ejercicio 2.

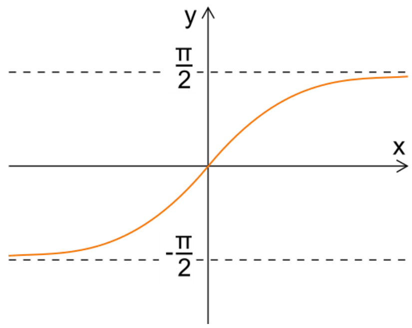
(1) Si f es continua en $[a, b]$ entonces para todo $x, y \in [a, b]$ y para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$
(2) Si f es continua en (a, b) entonces para todo $x, y \in (a, b)$ y para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$

(1) **VERDADERO:** Ver teórico. En las clases se vio este resultado de diferentes maneras para demostrar el teorema de integrabilidad de funciones continuas. Quienes siguieron las notas, ver el Teorema 119 de la sección 3 del capítulo de *Límites y continuidad*.
(2) **FALSO:** Contraejemplo: considerar $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $(0, 1)$. Esta función es continua pero no verifica la afirmación en ese intervalo. Tomando $\epsilon = 1$, si la afirmación es cierta, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta, x, y \in (0, 1)$, entonces $|f(x) - f(y)| < 1$. Consideremos $x \in (0, 1)$ tal que $\frac{x}{2} < \delta$. Tenemos entonces $0 < \frac{x}{2} < x < 1$, $|x - \frac{x}{2}| = \frac{x}{2} < \delta$, por lo tanto $|f(x) - f(\frac{x}{2})| < 1$. Calculando $|f(x) - f(\frac{x}{2})| = |\frac{1}{x} - \frac{2}{x}| = \frac{1}{x} > 1$. Esta contradicción prueba que la afirmación no se verifica para esta función.

Ejercicio 3.

(1) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente y no está acotada superiormente, entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
(2) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, entonces f no está acotada

(1) **VERDADERO:** Directo a partir de la definición de límite: dado $K > 0$, como f es no acotada, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > K$. Como f es estrictamente creciente, $f(y) > K$ para todo $y > x$.
(2) **FALSO:** Contraejemplo: considerar la función $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(x) = \arctan(x)$, cuya gráfica se encuentra en la figura:



Es estrictamente creciente y acotada.

Ejercicio 4.

(1) Si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ presenta extremo relativo en $p \in (a,b)$ y f es derivable en p, entonces $f'(p) = 0$

(2) Si f presenta extremo relativo en p, entonces f es derivable en p y $f'(p) = 0$

(1) **VERDADERO:** Ver teórico. En las notas del curso es la Proposición 180 de la Sección 3.4.2 (*Extremos relativos y derivadas*).

(2) **FALSO:** Considerar $f(x) = |x|$ en $[-1,1]$. f presenta un extremo relativo (y absoluto) en $p = 0$ pero no es derivable en $p = 0$.

Ejercicios de completar

Ejercicio 1.

<u>Versión 1</u>: Sea $f(x) = \operatorname{sen}\left(\log\left(3x + e^{g(x)}\right)\right)$, donde g es una función derivable en $x = 1/4$. Se sabe que $g(1/4) = \log(1/4)$ y que $g'(1/4) = 12$. Calcular $f'(1/4)$.
Por la regla de la cadena múltiples veces se tiene que

$$f'(x) = \frac{cos(log(3x + e^{g(x)}))}{3x + e^{g(x)}}(3 + e^{g(x)}g'(x))$$

en los x donde g es derivable. Ahora hay que evaluar en $x = 1/4$, recordando que $e^{log(1/4)} = 1/4$ se tiene

$$f'(1/4) = \frac{cos(log(1))}{1}(3 + \frac{12}{4}) = 6$$

<u>Versión 2</u>: Sea $f(x) = \sqrt{\arctan(2x) + (g(x))^2}$, donde g es una función derivable en $x = 0$. Se sabe que $g(0) = -1$ y que $g'(0) = -3$. Calcular $f'(0)$.
Por la regla de la cadena múltiples veces se tiene que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\arctan(x) + g(x)^2}}\left(\frac{2}{1 + (2x)^2} + 2g(x)g'(x)\right)$$

en los x donde g es derivable. Ahora hay que evaluar en $x = 0$, usando que $\arctan(0) = 0$ tenemos que

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1}}\left(2 + 2(-1)(-3)\right) = 4$$

<u>Versión 3</u>: Sea $f(x) = e^{\operatorname{arcsen}(1-x)+\cos(g(x))}$, donde g es una función derivable en $x = 1$. Se sabe que $g(1) = \pi/2$ y que $g'(1) = -13$. Calcular $f'(1)$.
Por la regla de la cadena múltiples veces se tiene que

$$f'(x) = e^{\arcsin(1-x)+\cos(g(x))}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} - \sin(g(x))g'(x)\right)$$

en los x donde g es derivable. En este cálculo se uso que la derivada de $\arcsin(x)$ es $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Evaluando en $x = 1$ se tiene

$$1\left(\frac{-1}{\sqrt{1}} - \sin(\pi/2)(-13)\right) = 12$$

Ejercicio 2.

<u>Versión 1:</u> Hallar $L \in \mathbb{R}$ que hace que la siguiente afirmación sea cierta: Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$, entonces $\left|\frac{e^2}{h}\int_{1-e^2}^{1-e^2+h}\frac{\log(1-t)}{1-t}dt - L\right| < \varepsilon$.
Si denotamos por $F(x) = \int_0^x e^2\frac{log(1-t)}{1-t}\,dt$ entonces lo que se pide es equivalente a $\lim_{h\to 0}\frac{F(1-e^2+h)-F(1-e^2)}{h} = L$ por lo tanto $L = F'(1-e^2)$. Usando el teorema fundamental

$$L = F'(1-e^2) = e^2\frac{\log(1-(1-e^2))}{1-(1-e^2)} = \log(e^2) = 2$$

<u>Versión 2:</u> Sea $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ la función inversa del seno. Hallar $L \in \mathbb{R}$ que hace que la siguiente afirmación sea cierta:
Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$, entonces $\left|\frac{8}{\pi h}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}+h}\frac{\operatorname{arcsen}(t)}{t^2}dt - L\right| < \varepsilon$
Denotando por $F(x) = \int_0^x \frac{8}{\pi}\frac{\arcsin t}{t^2}\,dt$ entonces lo que se pide es equivalente a $\lim_{h\to 0}\frac{F(\frac{1}{\sqrt{2}}+h)-F(\frac{1}{\sqrt{2}})}{h} = L$. Entonces $F'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = L$, por el teorema fundamental se tiene

$$L = F'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{8}{\pi}\frac{\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{8}{\pi}\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = 4$$

<u>Versión 3:</u> Hallar $L \in \mathbb{R}$ que hace que la siguiente afirmación sea cierta: Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$, entonces $\left|\frac{\sqrt{13}}{3h}\int_3^{3+h}\frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}dt - L\right| < \epsilon$.
Si denotamos por $F(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{13}}{3}\frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}\,dt$, entonces lo que se pide es equivalente a $\lim_{h\to 0}\frac{F(3+h)-F(3)}{h} = L$ por lo tanto $L = F'(3)$. Usando el teorema fundamental

$$L = F'(3) = \frac{\sqrt{13}}{3}\frac{3}{\sqrt{1+3+3^2}} = 1$$

Ejercicio 3.

Para solucionar el problema debe moverse el deslizador hasta lograr que la pendiende del segmento AB sea igual a la pendiente de la recta tangente.
Versión 1: c = -0.27; Versión 2: c = 1.49; Versión 3: c = 1.69.

Ejercicio 4.

<u>Versión 1</u>: Se pide hallar la recta tangente en $a = 2$. Moviendo el deslizador de la figura hasta $a = 2$ se obtiene que $f(2) = -1$ y $f'(2) = -0.5$. Entonces la recta tangente es $g(x) = -0.5(x-2) - 1$ por lo tanto $g(-4) = 2$.

<u>Versión 2</u>: Se pide hallar la recta tangente en $a = -1$. Moviendo el deslizador de la figura hasta $a = -1$ se obtiene $f(-1) = 0$ y $f'(-1) = 1.57$. Entonces la recta tangente es $g(x) = 1.57(x+1)$. Se tiene $g(100/157 - 1) = 1$.

<u>Versión 3</u>: Se pide hallar la recta tangente en $a = 1$. Moviendo el deslizador de la figura hasta $a = 1$ se obtiene que $f(1) = 2$ y $f'(1) = -2.33$. Entonces la recta tangente es $g(x) = -2.33(x-1) + 2$. Se tiene que $g(500/233 - 1) = 1,66$.

Ejercicios de Múltiple Opción

MO1:

<u>Versión 1</u>: Sea

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + \alpha x + 1 & \text{si } x < 0 \\ -\beta e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Vamos a definir las funciones $g(x) = 3x^2 + \alpha x + 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ y $h(x) = -\beta e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$ que son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$.
Para que $f(x)$ sea derivable, sabemos que tiene que ser continua en $x = 0$, ya que si no es continua no es derivable.

Continuidad:
Se debe cumplir que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

Para $x \to 0^-$ se tiene que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = g(0) = 1$$

Para $x \to 0^+$ se tiene que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = h(0) = f(0) = -\beta$$

Por lo tanto para que sea continua $\beta = -1$.

Derivabilidad:
Para que sea derivable debe existir el cociente incremental

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Para esto deben existir los límites laterales y coincidir. Como en la parte anterior usaremos a $g(x)$ y $h(x)$.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0)$$

$g'(x) = 6x + \alpha$, por lo tanto $g'(0) = \alpha$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(0)$$

$h'(x) = -\beta e^x$, por lo tanto $h'(0) = -\beta$.
Por lo tanto $\alpha = -\beta$, de donde $\alpha = 1$.

<u>Versión 2</u>: Sea

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - \alpha x + 4 & \text{si } x < 0 \\ \beta e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Siguiendo el mismo razonamiento que la versión anterior, sean $g(x) = 2x^2 - \alpha x + 4$ y $h(x) = \beta e^x$.

Continuidad:
$g(0) = h(0) \iff 4 = \beta$

Derivabilidad:
$g'(x) = 4x - \alpha$ y $h'(x) = \beta e^x$, por lo tanto $g'(0) = h'(0) \iff -\alpha = \beta \iff \alpha = -4$.

<u>Versión 3</u>: Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + 2 & \text{si } x < 0 \\ \beta e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Siguiendo el mismo razonamiento que la versión anterior, sean $g(x) = x^2 + \alpha x + 2$ y $h(x) = \beta e^x$.

Continuidad:
$g(0) = h(0) \iff 2 = \beta$

Derivabilidad:
$g'(x) = 2x + \alpha$ y $h'(x) = \beta e^x$, por lo tanto $g'(0) = h'(0) \iff \alpha = \beta \iff \alpha = 2$.

MO2:

Versión 1

La medida de la hipotenusa en función de a es:
$h(a) = \sqrt{a^2 + (4-a)^2} = (2a^2 - 8a + 16)^{1/2}$ y por lo tanto la función a minimizar. Para ello la derivaremos y hallaremos las raíces de la derivada.
$h'(a) = \frac{1}{2}(2a^2 - 8a + 16)^{-1/2}(4a - 8)$
Como $(2a^2 - 8a + 16)^{-1/2} > 0\ \forall a$, el signo de $h'(a)$ es el signo de $4a - 8$, que tiene raíz en 2 y es positivo a la derecha del 2 (por lo tanto $h(a)$ creciente) y negativo a la izquierda, (por lo tanto $h(a)$ decreciente). O sea que $h(a)$ tiene un mínimo en $a = 2$ y $h(a) = \sqrt{8}$.

Versión 2

La medida de la hipotenusa en función de a es:
$h(a) = \sqrt{a^2 + (6-a)^2} = (2a^2 - 12a + 36)^{1/2}$ y por lo tanto la función a minimizar. Para ello la derivaremos y hallaremos las raíces de la derivada.
$h'(a) = \frac{1}{2}(2a^2 - 12a + 36)^{-1/2}(4a - 12)$
Como $(2a^2 - 12a + 36)^{-1/2} > 0\ \forall a$, el signo de $h'(a)$ es el signo de $4a - 12$, que tiene raíz en 3 y es positivo a la derecha del 3 (por lo tanto $h(a)$ creciente) y negativo a la izquierda, (por lo tanto $h(a)$ decreciente). O sea que $h(a)$ tiene un mínimo en $a = 3$ y $h(3) = \sqrt{18}$.

Versión 3

La medida de la hipotenusa en función de a es:
$h(a) = \sqrt{a^2 + (8-a)^2} = (2a^2 - 16a + 64)^{1/2}$ y por lo tanto la función a minimizar. Para ello la derivaremos y hallaremos las raíces de la derivada.
$h'(a) = \frac{1}{2}(2a^2 - 16a + 64)^{-1/2}(4a - 16)$
Como $(2a^2 - 16a + 64)^{-1/2} > 0\ \forall a$, el signo de $h'(a)$ es el signo de $4a - 16$, que tiene raíz en 4 y es positivo a la derecha del 4 (por lo tanto $h(a)$ creciente) y negativo a la izquierda, (por lo tanto $h(a)$ decreciente). O sea que $h(a)$ tiene un mínimo en $a = 4$ y $h(4) = \sqrt{32}$.

MO3:

<u>Versión 1</u>:

$$F(x) = \int_0^{\sin(x)} e^{g(t)} g'(t)dt$$

usando la fórmula de sustitución o cambio de variable en la última integral se tiene que $u = g(t)$, $du = g'(t)dt$ de donde se deduce que

$$F(x) = \int_{g(0)}^{g(\sin(x))} e^u du = e^u|_{g(0)}^{g(\sin(x))} = e^{g(sen(x))} - 1,$$

ya que $g(0) = 0$.

<u>Versión 2</u>:

$$F(x) = \int_0^{\sin(x)} e^{h(t)} h'(t)dt$$

usando la fórmula de sustitución o cambio de variable en la última integral se tiene que $u = h(t)$, $du = h'(t)dt$ de donde se deduce que

$$F(x) = \int_{h(0)}^{h(\sin(x))} e^u du = e^u|_1^{h(\sin(x))} = e^{h(sen(x))} - e,$$

ya que $h(0) = 1$.

<u>Versión 3</u>:

$$F(x) = \int_0^{\cos(x)} e^{g(t)} g'(t)dt$$

usando la fórmula de sustitución o cambio de variable en la última integral se tiene que $u = g(t)$, $du = g'(t)dt$ de donde se deduce que

$$F(x) = \int_{g(0)}^{g(\cos(x))} e^u du = e^u|_0^{g(\cos(x))} = e^{g(cos(x))} - 1,$$

ya que $g(0) = 0$.

MO4:

<u>Versión 1</u>:

$$h(x) = xe^x g(x)$$

entonces

$$h(0) = 0.$$

Calculando la derivada primera

$$h'(x) = (xe^x)'g(x) + (xe^x)g'(x) = (e^x + xe^x)g(x) + (xe^x)g'(x) = e^x g(x) + (xe^x)(g(x) + g'(x))$$

evaluando en 0 se tiene que $h(0) = g(0)$. Volvemos a derivar para calcular la derivada segunda $h''(x) = e^x g(x) + e^x g'(x) + (xe^x)'(g(x) + g'(x)) + (xe^x)(g'(x) + g''(x)) = e^x g(x) + e^x g'(x) + (e^x + xe^x)(g(x) + g'(x)) + (xe^x)(g'(x) + g''(x)) = xe^x(g(x) + 2g'(x) + g''(x)) + e^x 2(g(x) + g'(x))$ evaluando en 0 se tiene que $h(0) = 2(g(0) + g'(0))$ de donde el polinomio de Taylor deorden 2 de f en 0 es

$$p(x) = g(0)x + (g(0) + g'(0))x^2$$

Versión 2:

$$h(x) = 2xe^x g(x)$$

entonces

$$h(0) = 0.$$

Calculando la derivada primera

$$h'(x) = (2xe^x)'g(x) + (2xe^x)g'(x) = 2((e^x + xe^x)g(x) + (xe^x)g'(x)) = 2(e^x g(x) + (xe^x)(g(x) + g'(x)))$$

evaluando en 0 se tiene que $h(0) = 2g(0)$. Volvemos a derivar para calcular la derivada segunda $h''(x) = 2(e^x g(x) + e^x g'(x) + (xe^x)'(g(x) + g'(x)) + (xe^x)(g'(x) + g''(x))) = 2(e^x g(x) + e^x g'(x) + (e^x + xe^x)(g(x)+g'(x)) + (xe^x)(g'(x)+g''(x))) = 2(xe^x(g(x)+2g'(x)+g''(x)) + e^x 2(g(x)+g'(x)))$ evaluando en 0 se tiene que $h(0) = 4(g(0) + g'(0))$ de donde el polinomio de Taylor deorden 2 de f en 0 es

$$p(x) = 2g(0)x + 2(g(0) + g'(0))x^2$$

Versión 3:

$$h(x) = -xe^x g(x)$$

entonces

$$h(0) = 0.$$

Calculando la derivada primera

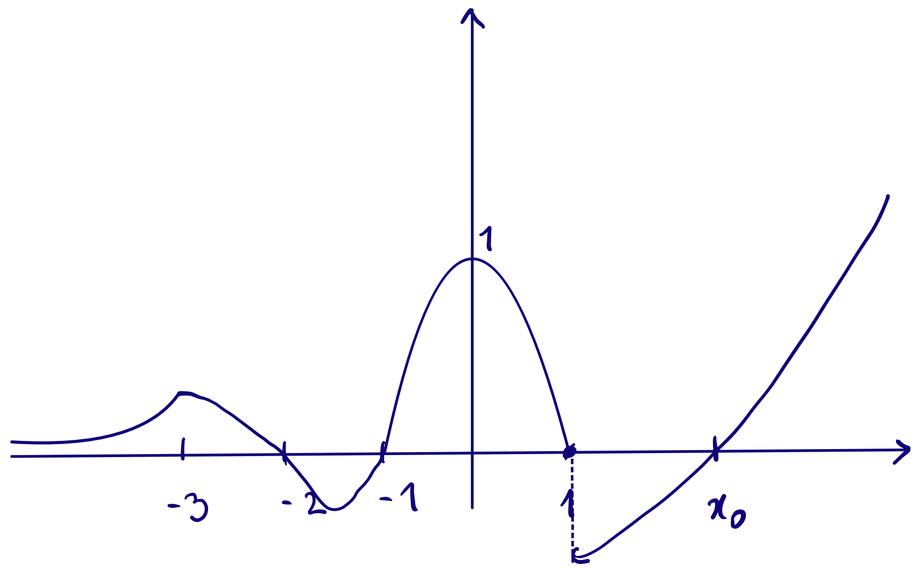
$$h'(x) = (-xe^x)'g(x) + (-xe^x)g'(x) = -(e^x + xe^x)g(x) - (xe^x)g'(x) = -e^x g(x) - (xe^x)(g(x) + g'(x))$$

evaluando en 0 se tiene que $h(0) = -g(0)$. Volvemos a derivar para calcular la derivada segunda $h''(x) = -(e^x g(x) + e^x g'(x) + (xe^x)'(g(x) + g'(x)) + (xe^x)(g'(x) + g''(x))) = -(e^x g(x) + e^x g'(x) + (e^x + xe^x)(g(x)+g'(x)) + (xe^x)(g'(x)+g''(x))) = -(xe^x(g(x)+2g'(x)+g''(x)) + e^x 2(g(x)+g'(x)))$ evaluando en 0 se tiene que $h(0) = -2(g(0) + g'(0))$ de donde el polinomio de Taylor deorden 2 de f en 0 es

$$p(x) = -g(0)x - (g(0) + g'(0))x^2$$

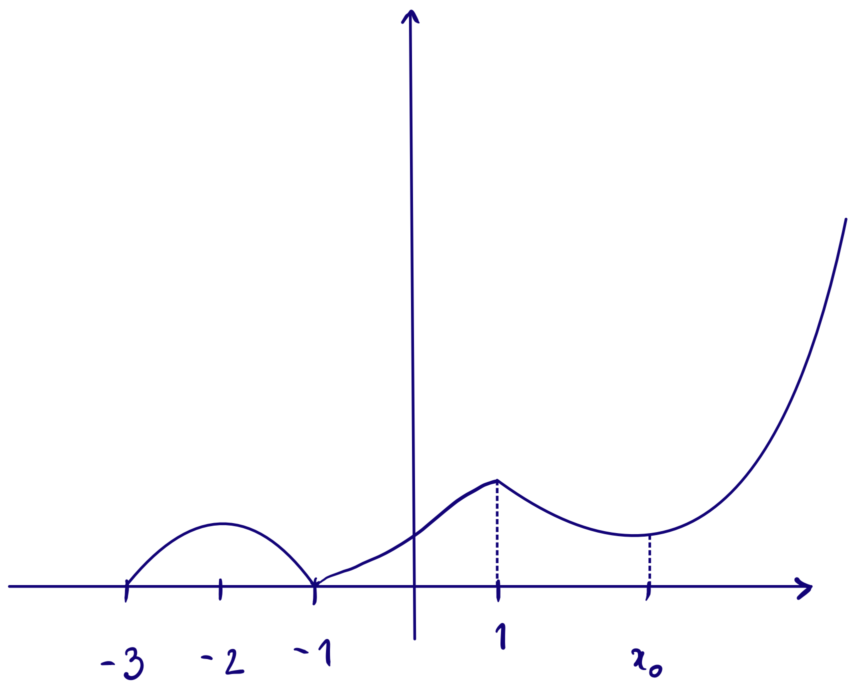
Ejercicio de desarrollo

Versión 1



(1)

(2) f es continua en el intervalo $(-\infty, 1)$ y en el intervalo $(1, +\infty)$. Entonces f es continua a trozos en cualquier intervalo $[a, b]$ y por lo tanto integrable en $[a, b]$.



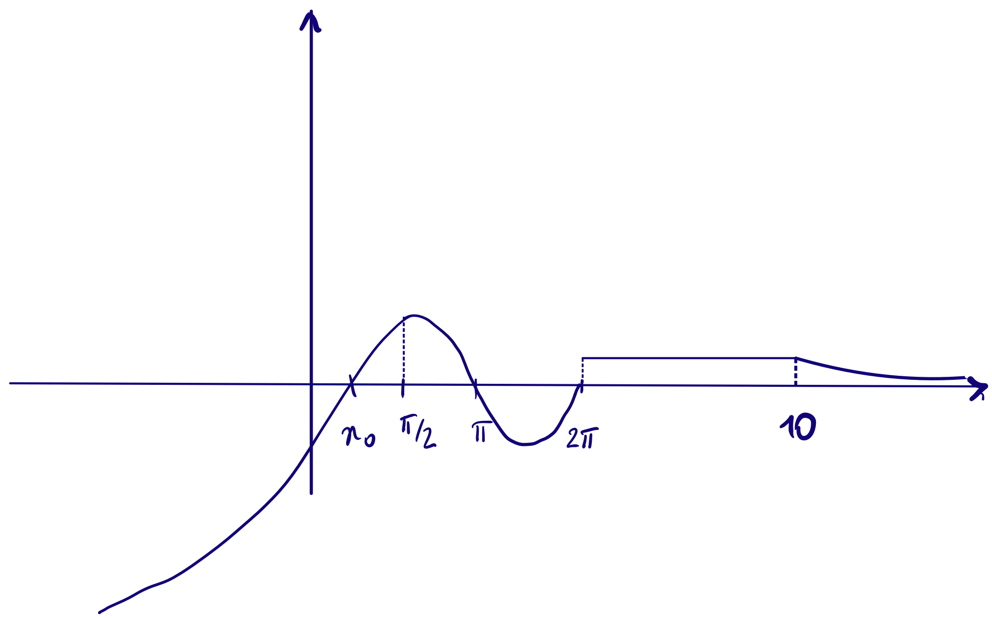
(3)

(4) Como el límite de f en $+\infty$ vale $+\infty$, entonces, en particular, existe $b \in (1, +\infty)$ tal que $f(b) > 0$. Sea $\tilde{f} : [1, b] \to R$ definida como:

$\tilde{f}(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ y $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in (1, b]$.

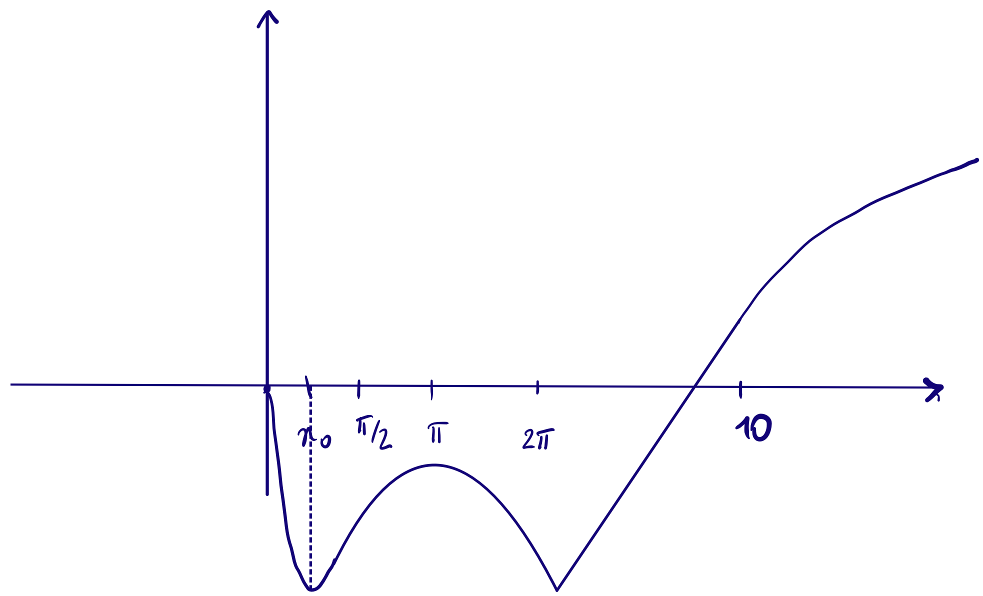
Entonces, $\tilde{f}$ es continua en $[1, b]$, $\tilde{f}(1) < 0$ y $\tilde{f}(b) > 0$. Por el teorema de Bolzano podemos entonces afirmar que existe $x_0 \in (1, b)$ tal que $\tilde{f}(x_0) = 0$. Entonces $f(x_0) = 0$.
Por el teorema fundamental $F'(x_0) = f(x_0) = 0$. Entonces x_0 es un cero de F'. Además el signo de F' coincide con el signo de f . Para valores mayores a x_0 ese signo es positivo y para valores menores a x_0 el signo es negativo. Por lo tanto F presenta un mínimo relativo en el punto x_0.

Versión 2



(1)

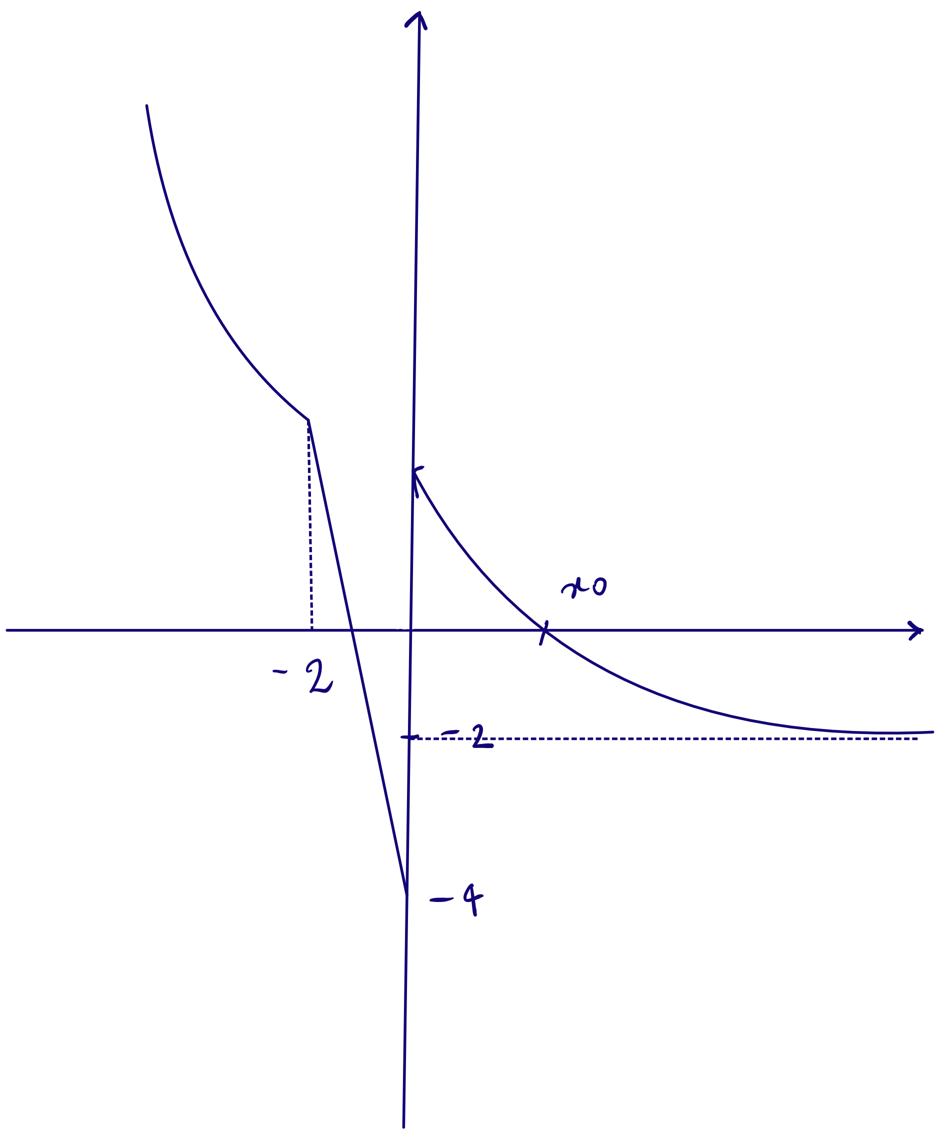
(2) f es continua en el intervalo $(-\infty, 2\pi)$ y en el intervalo $(2\pi, +\infty)$. Entonces f es continua a trozos en cualquier intervalo $[a, b]$ y por lo tanto integrable en $[a, b]$.



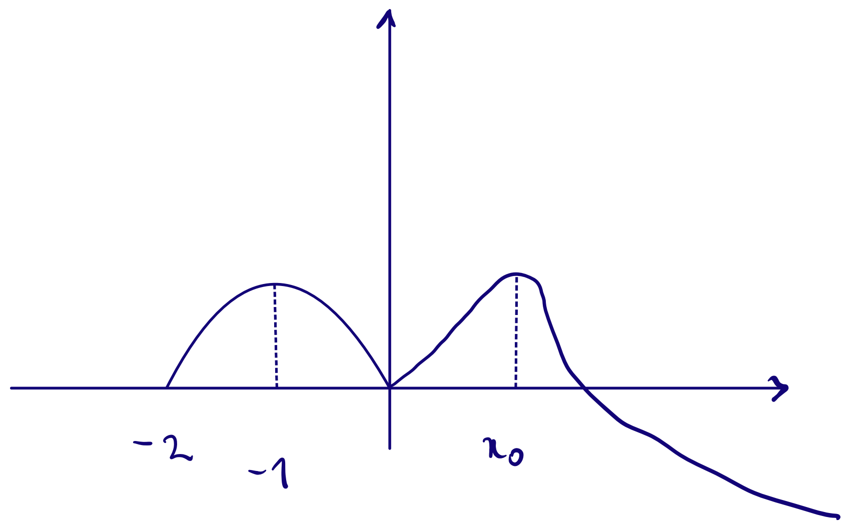
(3)

(4) f es continua en $[0, 2\pi]$, $f(0) < 0$ y $f(b) > 0$. Por el teorema de Bolzano podemos entonces afirmar que existe $x_0 \in (0, 2\pi)$ tal que $f(x_0) = 0$.

Por el teorema fundamental $F'(x_0) = f(x_0) = 0$. Entonces x_0 es un cero de F'. Además el signo de F' coincide con el signo de f . Para valores mayores a x_0 ese signo es positivo y para valores menores a x_0 el signo es negativo. Por lo tanto F presenta un mínimo relativo en el punto x_0.



(1)
(2) f es continua en el intervalo $(-\infty, 0)$ y en el intervalo $(0, +\infty)$. Entonces f es continua a trozos en cualquier intervalo $[a, b]$ y por lo tanto integrable en $[a, b]$.



(3)

(4) Como el límite de f en $+\infty$ vale -2 , entonces, en particular, existe $b \in (0, +\infty)$ tal que $f(b) < 0$. Sea $\tilde{f} : [1, b] \to \mathbb{R}$ definida como:

$\tilde{f}(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$ y $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in (0, b]$.

Entonces, $\tilde{f}$ es continua en $[0, b]$, $\tilde{f}(0) > 0$ y $\tilde{f}(b) < 0$. Por el teorema de Bolzano podemos entonces afirmar que existe $x_0 \in (0, b)$ tal que $\tilde{f}(x_0) = 0$. Entonces $f(x_0) = 0$.
Por el teorema fundamental $F'(x_0) = f(x_0) = 0$. Entonces x_0 es un cero de F'. Además el signo de F' coincide con el signo de f . Para valores menores a x_0 ese signo es positivo y para valores mayores a x_0 el signo es negativo. Por lo tanto F presenta un máximo relativo en el punto x_0.