Ejercicio de desarrollo

Se considera $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ como en la figura.

(1) Demostrar que f es integrable en $[a, b]$.

(2) ¿Es f continua en p? En caso afirmativo, demuéstrelo. En caso negativo, encontrar $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe x_δ tal que $|x_\delta - p| < \delta$ y $|f(x_\delta) - f(p)| \geq \epsilon$.

- Solución versión 1:

  (1) Observar que la función f restringida al intervalo $[a, p]$ es monótona creciente y por lo tanto integrable en ese intervalo. Además f restringida al intervalo $(p, b]$ es constante y por lo tanto también es integrable en ese intervalo. Deducimos entonces que f es integrable en todo $[a, b]$.

  (2) Para todo $\delta > 0$, podemos elegir $x_\delta \in (p, p + \delta)$. Para este x_δ se tiene que $f(x_\delta) = 3/4$, entonces $\mid f(x_\delta) - f(p) \mid = \mid 3/4 - 2 \mid = 5/4$. Por lo tanto alcanza con tomar $\varepsilon < 5/4$.

- Solución versión 2:

  (1) Observar que la función f restringida al intervalo $[a, p]$ es constante y por lo tanto integrable en ese intervalo. Además f restringida al intervalo $(p, b]$ es monótona decreciente y por lo tanto también es integrable en ese intervalo. Deducimos entonces que f es integrable en todo $[a, b]$.

  (2) Para todo $\delta > 0$, podemos elegir $x_\delta \in (p - \delta, p)$. Para este x_δ se tiene que $f(x_\delta) = 2$, entonces $\mid f(x_\delta) - f(p) \mid = \mid 2 - 9/2 \mid = 5/2$. Por lo tanto alcanza con tomar $\varepsilon < 5/2$.

- Solución versión 3:

  (1) Observar que la función f restringida al intervalo $[a, p]$ es monótona creciente y por lo tanto integrable en ese intervalo. Además f restringida al intervalo $(p, b]$ es también mónotona creciente y por lo tanto también es integrable en ese intervalo. Deducimos entonces que f es integrable en todo $[a, b]$.

  (2) Para todo $\delta > 0$, podemos elegir $x_\delta \in (p - \delta, p)$. Para este x_δ se tiene que $f(x_\delta) \leq 1$, entonces $\mid f(x_\delta) - f(p) \mid \geq \mid 1 - 3/2 \mid = 1/2$. Por lo tanto alcanza con tomar $\varepsilon < 1/2$.