**CDIV 2021 - PRIMER PARCIAL**
**SOLUCIÓN**

## Ejercicios de Múltiple Opción

### Múltiple Opción 1

**Versión 1:** Considere las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas de la siguiente manera:

$$f(x) = |x+2|\,,\ x \in \mathbb{R};\ g(y) = (y-2)^2\,,\ y \in \mathbb{R}$$

Entonces ¿$(g \circ f)(0)$ es $<, =$ ó $>$ que $(f \circ g)(0)$?

Observar que $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(2) = 0$ y $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(4) = 6$, entonces la respuesta correcta es: $(g \circ f)(0) < (f \circ g)(0)$.

**Versión 2:** Considere las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas de la siguiente manera:

$$f(x) = |x-2|\,,\ x \in \mathbb{R};\ g(y) = (y+2)^2\,,\ y \in \mathbb{R}$$

Entonces ¿$(g \circ f)(0)$ es $<, =$ ó $>$ que $(f \circ g)(0)$?

Observar que $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(2) = 16$ y $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(4) = 2$, entonces la respuesta correcta es: $(g \circ f)(0) > (f \circ g)(0)$.

**Versión 3:** Considere las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas de la siguiente manera:

$$f(x) = |x+2|\,,\ x \in \mathbb{R};\ g(y) = (y+2)^2\,,\ y \in \mathbb{R}$$

Entonces ¿$(g \circ f)(0)$ es $<, =$ ó $>$ que $(f \circ g)(0)$?

Observar que $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(2) = 16$ y $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(4) = 6$, entonces la respuesta correcta es: $(g \circ f)(0) > (f \circ g)(0)$.

### Múltiple Opción 2

**Versión 1:** Sea $g$ una función real acotada en un entorno de $x_0 = 1$. Considere el siguiente límite

$L = \lim_{x \to 1} \left[ g(x) \dfrac{p(x)}{q(x)} \right]$
donde $p$ es un polinomio tal que $p(1) = 0$ y $q$ es un polinomio que no se anula en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución: $\lim_{x \to 1} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$ por álgebra de límites ya que $p(1) = 0$ y $q(1) \neq 0$. Además, como $g$ está acotada en un entorno de 1, se tiene que $L = 0$ (acotado por algo que tiende a 0 tiende a 0)

**Versión 2:** Sea $g$ una función real acotada en un entorno de $x_0 = -1$. Considere el siguiente límite

$L = \lim_{x \to -1} \left[ g(x) \dfrac{p(x)}{q(x)} \right]$

donde $p$ es un polinomio tal que $p(-1) = 0$ y $q$ es un polinomio que no se anula en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución: $\lim_{x\to -1} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$ por álgebra de límites ya que $p(-1) = 0$ y $q(-1) \neq 0$. Además, como $g$ está acotada en un entorno de $-1$, se tiene que $L = 0$ (acotado por algo que tiende a 0 tiende a 0)

**Versión 3:** Sea $g$ una función real acotada en un entorno de $x_0 = 2$. Considere el siguiente límite

$$L = \lim_{x\to 2} \left[ g(x) \frac{p(x)}{q(x)} \right]$$

donde $p$ es un polinomio tal que $p(2) = 0$ y $q$ es un polinomio que no se anula en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución: $\lim_{x\to 2} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$ por álgebra de límites ya que $p(2) = 0$ y $q(2) \neq 0$. Además, como $g$ está acotada en un entorno de 2, se tiene que $L = 0$ (acotado por algo que tiende a 0 tiende a 0)

**Múltiple Opción 3**

**Versión 1:** Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \text{sen}(\pi x) & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 & \text{si } x < 1, \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro fijo.

La función cumple $f(1) = 0$, por otro lado el $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 - 2\alpha + \alpha^2$. Para que sea continua en 1 esos dos valores tienen que coincidir, y eso pasa si y solo si $\alpha = 1$.

**Versión 2:** Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\text{sen}(\pi x) & \text{si } x \geq 1 \\ (x^2 - 2\beta x + \beta^2)^2 & \text{si } x < 1, \end{cases}$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$ es un parámetro fijo.

La función cumple $f(1) = 0$, por otro lado el $\lim_{x\to 1^-} f(x) = (1 - 2\beta + \beta^2)^2$. Para que sea continua en 1 esos dos valores tienen que coincidir, y eso pasa si y solo si $\beta = 1$.

**Versión 3:** Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\text{sen}^2(\pi x) & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 - 2\gamma x + \gamma^2 & \text{si } x < 1, \end{cases}$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}$ es un parámetro fijo.

La función cumple $f(1) = 0$, por otro lado el $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 - 2\gamma + \gamma^2$. Para que sea continua en 1 esos dos valores tienen que coincidir, y eso pasa si y solo si $\gamma = 1$.

**Múltiple Opción 4**

**Versión 1:** Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Considere la siguiente función:

$$F(x) = \int_0^x |f(t)\cos(\pi t)|\, dt, \ x \in [0, 1].$$

**Versión 2:** Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Considere la siguiente función: $F(x) = \displaystyle\int_0^x (f(t)\cos(\pi t))^2 \, dt,\ x \in [0,1].$

**Versión 3:** Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Considere la siguiente función: $F(x) = \displaystyle\int_0^x |f(t)| \cos^2(\pi t) \, dt,\ x \in [0,1].$

**Solución:** En todos los casos el integrando es una función mayor o igual a 0, por lo tanto la integral indefinida es monótona creciente. Para ver esto, observar que si $x \leq y$, entonces $F(y) - F(x) = \int_0^y g(x) - \int_0^x g(x) = \int_x^y g(x) \geq 0$ si $g \geq 0$. Por lo tanto $F(y) \geq F(x)$, es decir $F$ es monótona creciente.