CDIV 2021 - PRIMER PARCIAL
SOLUCIÓN

Ejercicios de completar

Ejercicio de supremo e ínfimo con dibujo

Versión 1

Siendo f una función estrictamente creciente, el supremo se alcanza en B y el ínfimo en A. Del análisis gráfico se deduce que $\sup f(x) = \max f(x) = f(B) = 2,45$ y $\inf f(x) = \min f(x) = f(A) = 1$

Versión 2

Del analisis gráfico se observa que $\sup f(x) = \max f(x) = 0,9$ y $\inf f(x) = -2,4$

Versión 3

Del análisis gráfico se observa que $\sup f(x) = \max f(x) = f(A) = 2$ y $\inf f(x) = \min f(x) = f(-0,5) = -0,25$

Ejercicio epsilon-delta con dibujo

Versión 1

Colocando el deslizador en el valor indicado 0.33 se devuelve el intervalo $I = (-0.55, 0.77)$. Como $0.55 < 0.77$, la respuesta correcta es -0.55, ya que si $\alpha > 0.55$ se puede encontrar x con $|x - p| < \alpha$ y $|f(x) - f(p)| \geq 0.33$ (cualquier x en el intervalo $(-\alpha, -0.55)$ verifica esto, como puede observarse del análisis gráfico). La tolerancia en este ejercicio era de ± 0.01 y las respuestas fuera de este rango serán consideradas incorrectas.

Versión 2

Colocando el deslizador en el valor indicado 0.6 se devuelve el intervalo $I = (1.71, 2.26)$. Como $0.26 < 0.29 = 2 - 1.71$, la respuesta correcta es 0.26, ya que si $\alpha > 0.26$ se puede encontrar x con $|x - p| < \alpha$ y $|f(x) - f(p)| \geq 0.6$ (cualquier x en el intervalo $(2.26, \alpha)$ verifica esto, como puede observarse del análisis gráfico). La tolerancia en este ejercicio era de ± 0.01 y las respuestas fuera de este rango serán consideradas incorrectas.

Versión 3

Colocando el deslizador en el valor indicado 0.2 se devuelve el intervalo $I = (0.28, 0.75)$. Como $0.22 = 0.5 - 0.28 < 0.25$, la respuesta correcta es 0.22, ya que si $\alpha > 0.22$ se puede encontrar x con $|x - p| < \alpha$ y $|f(x) - f(p)| \geq 0.2$ (cualquier x en el intervalo $(\alpha, 0.28)$ verifica esto, como puede observarse del análisis gráfico). La tolerancia en este ejercicio era de ± 0.01 y las respuestas fuera de este rango serán consideradas incorrectas.

Ejercicio área encerrada entre gráficos

Versión 1

Según el dibujo la función g es mayor o igual que f en $[0,1/3]\cup[2/3,1]$ entonces el área pedida es

$$A=\int_0^{1/3} g(x)-f(x)\ dx+\int_{1/3}^{2/3} f(x)-g(x)\ dx+\int_{2/3}^{1} g(x)-f(x)\ dx$$

además

$$\int_{2/3}^{1} g(x)-f(x)\ dx=\int_0^{1} g(x)-f(x)\ dx-\int_0^{1/3} g(x)-f(x)\ dx-\int_{1/3}^{2/3} g(x)-f(x)\ dx$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}A&=2\int_{1/3}^{2/3} f(x)-g(x)\ dx+\int_0^{1} g(x)-f(x)\ dx\\&=2\int_{1/3}^{2/3} f(x)\ dx-2\int_{1/3}^{2/3} g(x)\ dx+\int_0^{1} g(x)\ dx-\int_0^{1} f(x)\ dx\\&=2\cdot 2-2\cdot\frac{3}{2}+9-7=3\end{aligned}$$

Versión 2 y 3

Según el dibujo la función f es mayor o igual que g en $[0,1/3]\cup[2/3,1]$ entonces el área pedida es

$$A=\int_0^{1/3} f(x)-g(x)\ dx+\int_{1/3}^{2/3} g(x)-f(x)\ dx+\int_{2/3}^{1} f(x)-g(x)\ dx$$

además

$$\int_{2/3}^{1} f(x)-g(x)\ dx=\int_0^{1} f(x)-g(x)\ dx-\int_0^{1/3} f(x)-g(x)\ dx-\int_{1/3}^{2/3} f(x)-g(x)\ dx$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}A&=2\int_{1/3}^{2/3} g(x)-f(x)\ dx+\int_0^{1} f(x)-g(x)\ dx\\&=2\int_{1/3}^{2/3} g(x)\ dx-2\int_{1/3}^{2/3} f(x)\ dx+\int_0^{1} f(x)\ dx-\int_0^{1} g(x)\ dx\end{aligned}$$

Según la fórmula anterior, en la versión 2 el área es $A=2\cdot 5-2\cdot 3+8-7=5$ y en la versión 3 es $A=2\cdot 5-2\cdot 2+8-7=7$.