Resolución del ejercicio 13

Examen de CDIV de febrero 2021

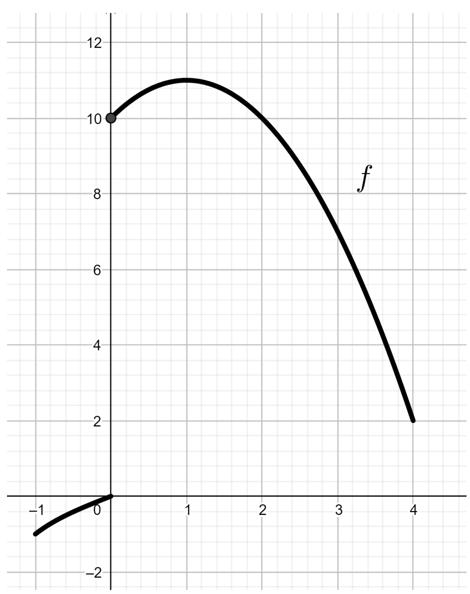
El ejercicio 13 del examen virtual de CDIV de febrero de 2021 tiene muchas versiones. La versión concreta que vamos a resolver aquí es la siguiente:

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \tan(\frac{\pi x}{4}) & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 2x + 10 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

y P la partición del intervalo $[-1, 4]$ definida por $P = \{-1, 0, 3, 4\}$.
Indicar el valor de $S^*(f, P) - S_*(f, P)$.
(Se sugiere estudiar la continuidad de f en 0).

He aquí la gráfica de la función f:



Se incluye para que, a medida que vayan leyendo el texto, observen lo que en éste se va explicando.

Como f es una función definida por pedazos, consideremos las funciones $tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde g está dada por

$$g(x) = -x^2 + 2x + 10.$$

Miremos el primer intervalo de la partición P, que es el intervalo $[-1, 0]$.

La función tangente es siempre creciente. Por lo tanto, la función f es creciente en el intervalo $[-1,0)$, donde va de $f(-1) = -1$ a $\lim_{x\to 0^-} f(x) = tan(0) = 0$. Como $f(0) = g(0) = 10$, concluimos que:

$$\inf_{x\in[-1,0]} f(x) = f(-1) = -1$$

$$\sup_{x\in[-1,0]} f(x) = f(0) = 10$$

Por lo tanto

$$\sup_{x\in[-1,0]} f(x) - \inf_{x\in[-1,0]} f(x) = 11.$$

Ahora estudiaremos el comportamiento de f en el intervalo $[0,4]$, donde coincide con la función g.

La función g es una función polinómica de grado 2, por lo que su gráfica es una parábola. Como el coeficiente principal (el que multiplica a x^2) es negativo, es una parábola con concavidad negativa. (Es decir, es una parábola "triste"). Para saber dónde g crece y decrece, hay que encontrar el punto donde g alcanza su máximo, que es el punto donde $g'(x) = 0$.

$$g'(x) = -2x + 2 \implies (g'(x) = 0 \iff x = 1)$$

Esto nos dice que, en el intervalo $[0,4]$, f crece en $[0,1]$ y decrece en $[1,4]$.

Miremos ahora el segundo intervalo de la partición P, que es $[0,3]$.

Como ahí está el punto $(x = 1)$ donde g toma su máximo absoluto, sabemos que $\sup_{x\in[0,3]} f(x) = \max_{x\in[0,3]} f(x) = f(1) = 11$. El ínfimo, que es en realidad mínimo, de f en $[1,3]$ podría darse en cualquiera de los extremos del intervalo. Para ver dónde se da, calculamos $f(0) = 10$ y $f(3) = 7$. Concluimos lo siguiente:

$$\inf_{x\in[0,3]} f(x) = f(3) = 7$$

$$\sup_{x\in[0,3]} f(x) = f(1) = 11$$

Por lo tanto

$$\sup_{x\in[0,3]} f(x) - \inf_{x\in[0,3]} f(x) = 4.$$

El tercer y último intervalo de la partición P es el $[3, 4]$. Como ahí f es decreciente, sabemos que:

$$\inf_{x\in[3,4]} f(x) = f(4) = 2$$
$$\sup_{x\in[3,4]} f(x) = f(3) = 7$$

Por lo tanto

$$\sup_{x\in[3,4]} f(x) - \inf_{x\in[3,4]} f(x) = 5.$$

Hemos puesto en los recuadros la información necesaria para calcular $S^*(f, P) - S_*(f, P)$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{S}^*(\mathbf{f}, \mathbf{P}) - \mathbf{S}_*(\mathbf{f}, \mathbf{P}) & = & (\sup_{x\in[-1,0]} f(x) - \inf_{x\in[-1,0]} f(x))(0-(-1)) & + \\ & & (\sup_{x\in[0,3]} f(x) - \inf_{x\in[0,3]} f(x))(3-0) & + \\ & & (\sup_{x\in[3,4]} f(x) - \inf_{x\in[3,4]} f(x))(4-3) & = \\ & & 11 + 4 \times 3 + 5 = \mathbf{28}. & \end{array}$$