SIMULACRO DE 2º PARCIAL

3 M.O:

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \quad F(x) = \int_4^{(x+1)^2} \cos^2(\pi t^2) + 1 \, dt$$

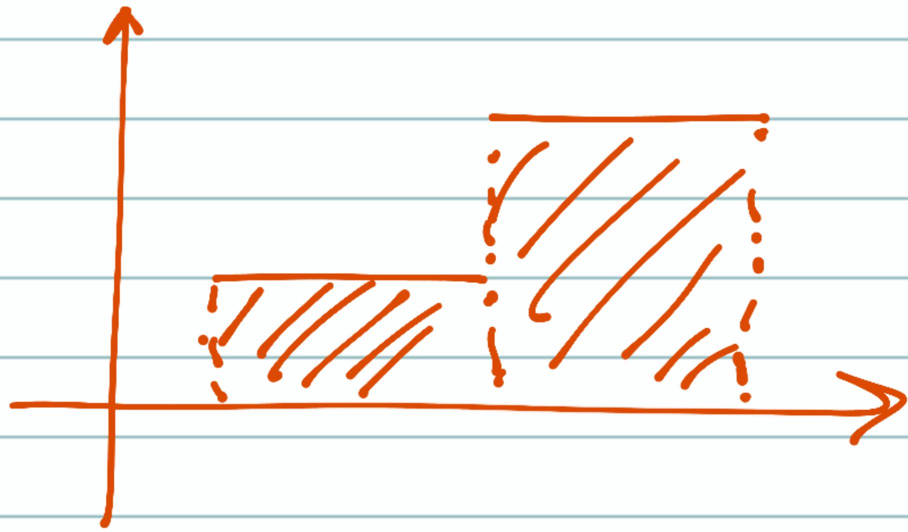
- F invertible / no invertible (en algún intervalo)

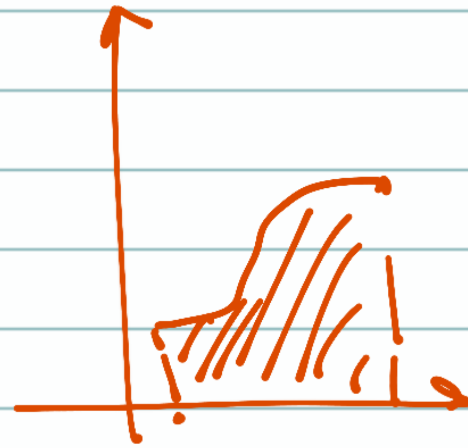
- En caso de que sí ¿$(F^{-1})'(0)$?

$\boxed{\text{Obs}: \cos^2(\pi t^2) + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

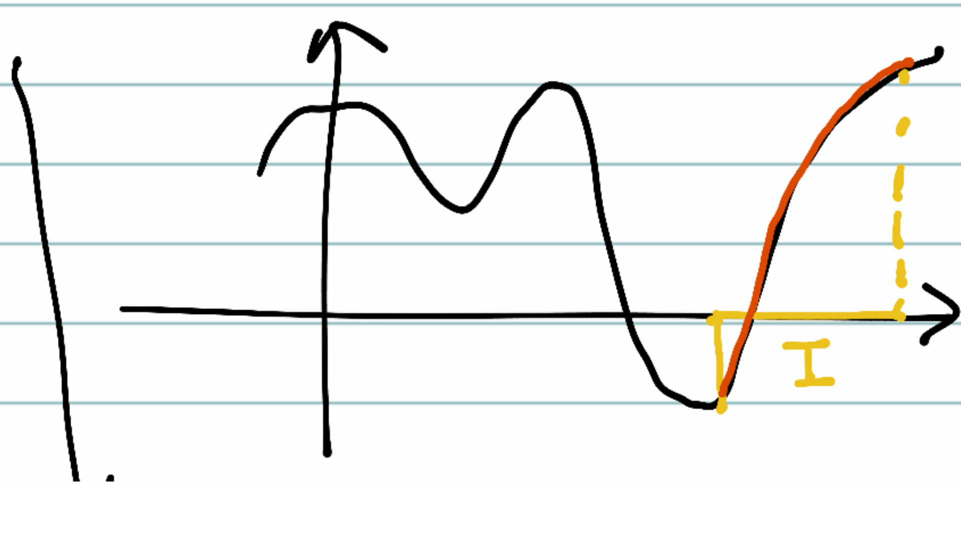
Hipótesis para aplicar TEO. FUND:

"la función a integrar debe ser continua".





Si vemos que F es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, entonces la restricción de F a I es invertible.



Una forma de ver esto es encontrar un intervalo I donde F' sea de signo constante

$$\left(\text{es decir } \begin{array}{l} F'(x) > 0 \quad \forall x \in I \quad \text{ó} \\ F'(x) < 0 \quad \forall x \in I \end{array} \right)$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, el teo fundamental nos da que, fijado $a \in \mathbb{R}$:

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt \quad \text{es derivable}$$

y $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Si tenemos $F(x) = \int_a^{h(x)} f(t)\,dt$

escribimos $F(x) = G(h(x))$

R. CADENA

$$\boxed{F'(x)} = G'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$= \boxed{f(h(x)) \cdot h'(x)}$$

Tenemos una fórmula para $F'(x)$ y por lo tanto podemos determinar cuándo $F'(x) \neq 0$.

4

$$A = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ derivable } \lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \right\}$$

$$B_1 = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ derivables } : \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \_\_\_\_ : \text{existe } a \text{ con } \lim_{x \to +\infty} f(x) = a \right\}$$

$$C_1 = \left\{ \text{—} : \lim_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty \right\}$$

$$C_2 = \left\{ \text{—} : \exists\, a \in \mathbb{R} : \lim_{x \to -\infty} f'(x) = a \right\}$$

Primero vamos que

$A \subseteq B_1$:

Af: Si $f'(x) \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$

dem:

para cada $n \in \mathbb{N}$

$$f(n+1) - f(n) \overset{\text{teo v. medio}}{=} f'(c_n)\,\overbrace{(n+1-n)}^{1}$$

donde c_n es algún punto en $[n, n+1]$.

Por lo tanto $c_n \longrightarrow +\infty$ si $n \longrightarrow \infty$

$$\lim_{n \to +\infty} f(n+1) - f(n) = \lim_{n \to \infty} f'(c_n) = +\infty$$

$\blacksquare$

Sabemos entonces que

$A \subseteq B_1$.

$f(x) = x^3$

$f \in B_1$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\Longrightarrow f \in B_1 \setminus A$

es decir, la inclusión es estricta.

<u>opciones</u>: ~~A~~ B ~~C~~ ~~D~~ E

Veamos que existe $f \in A$

tal que $\nexists \lim_{x \to -\infty} f'(x)$.

Si probamos esto, la opción

correcta es la B.

$$f(x) = \begin{cases} -x - \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

obs: $\to f(0) = 0$

$\to$ derivada en 0^-:

la derivada en 0 por derecha

es $\lim_{x \to 0^+} 2x - 2 = -2$

y por izquierda es

$$\lim_{x \to 0^-} -1 - \cos(x) = -2$$

$\leadsto$ $\boxed{f \text{ es derivable en } 0}$

Entonces:

Es claro que $f \in A$.

y la derivada para $x < 0$

es:

$$f'(x) = -1 - \cos x$$

que no tiene límite en $-\infty$

(oscila).

Por lo tanto

$$f \notin C_1 \cup C_2 .$$

6) $\displaystyle\int_1^4 1\cdot \operatorname{arctg}(\sqrt{x})\,dx =$

$$= x\operatorname{Arctg}(\sqrt{x})\Big|_1^4 - \int \frac{x}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \frac{x}{2(1+x)\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{u^2}{1+u^2}\,du$$

$u = \sqrt{x}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$$= \int \frac{u^2+1-1}{1+u^2}\,du = \int 1\,du - \text{Arctg}(u)$$

$$= u - \text{Arctg}\, u$$

$$= \sqrt{x} - \text{Arctg}(\sqrt{x}) \Big|_1^4$$

$\uparrow$

Deshaciendo CV

<u>Solución</u>:

$$x\,\text{Arctg}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \text{Arctg}(\sqrt{x}) \Big|_1^4 =$$

$$= 4\,\mathrm{Arctg}(2) - 2 + \mathrm{Arctg}(2) - \left(\mathrm{Arctg}(1) - 1 + \mathrm{Arctg}\,1\right)$$

$$= 5\,\mathrm{Arctg}(2) - 1 - 2\,\mathrm{Arctg}(1)$$

E .