Cálculo diferencial e integral en una variable **2do semestre de 2020**

Segundo parcial – Versión 1 Simulacro

N° Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

La duración del parcial es de tres horas y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Notación:

En los siguientes ejercicos, se escribe $P_n(f, a)$ al polinomio de Taylor de orden n (cuando existe) de la función f en el punto a.

Ejercicios: Verdadero/Falso (Total: 12 puntos)

Correctos: 2 puntos. Incorrectos: −2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

1. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua en 1, entonces f es derivable en 1.

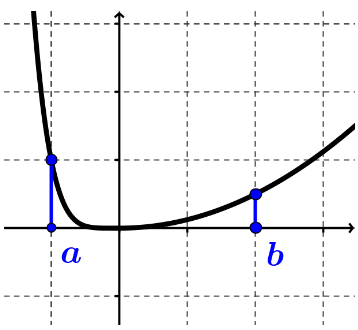
2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion derivable y $r_1(x)$ la recta tangente a f por 1. Si $r_1(5) = f(5)$ entonces existe $c \in (1, 5)$ tal que r_c (la recta tangente a f por c) es paralela a r_1.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin(x)$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f\left(\frac{1}{2}\right) - P_n(f, 0)\left(\frac{1}{2}\right)| < \epsilon$.

4. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x)g(x)$. Entonces $P_n(h, a) = P_n(f, a)P_n(g, a)$.

5. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables, tales que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $f(x) = g(x)$

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable cuyo gráfico se la siguiente



Entonces $f'(a) < f'(b)$ y $|f'(b)| < |f'(a)|$.

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 48 puntos)

Correctos: 8 puntos. Incorrectos: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

En caso de tener al menos 4 ejercicios Verdadero/Falso correctos y algún ejercicio Múltiple Opción incorrecto, el primer ejercicio Múltiple Opción incorrecto pasará a restar 0 puntos.

1. La igualdad

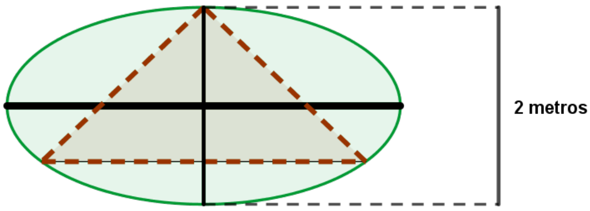
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^x-1)-1+ax^2+bx^3}{x^3} = 0$$

se cumple apra los siguientes valores $a, b \in \mathbb{R}$

(A) $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$
(B) $a = 1$, $b = 3$
(C) $a = 1$, $b = 0$
(D) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$
(E) No existen valores de $a, b \in \mathbb{R}$ de forma que se verifique la igualdad.

2. Sea $\mathcal{C}$ una elipse con eje mayor que mide 4 metros y un eje menor que mide 2 metro.

Se inscribe un triángulo en $\mathcal{C}$ tal que su base es paralela al eje mayor y es simétrico respectro al eje menor, como se muestra en la figura



Deterimar el mayor área posible (en metros) de un triángulo con estas caracterizticas

(A) $\frac{1}{2}$
(B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
(C) 2
(D) $6\sqrt{3}$
(E) $2\sqrt{3}$

3. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\displaystyle\int_4^{(x+1)^2} \cos^2(\pi t^2) + 1\, dt$. Sugerencia: no es necesartio calcular la integral.

(A) La función F no es invertible en $\mathbb{R}$, pero si lo es en $(-1, +\infty)$. Ademas $(F^{-1})'(0) = \frac{1}{8}$.
(B) La funcion F es invertible en $\mathbb{R}$. Además $(F^{-1})'(0) = \frac{1}{2}$.
(C) La función F no es invertible en $\mathbb{R}$, pero si lo es en $(-1, +\infty)$. Además $(F^{-1})'(0) = \frac{1}{4}$.
(D) La función F es invertible en $\mathbb{R}$. Además $(F^{-1})'(0) = \frac{1}{4}$
(E) La función F es invertible en $\mathbb{R}$. Además $(F^{-1})'(0) = \frac{1}{8}$

4. Se consideran los siguientes conjuntos de funciones reales

$$A = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ derivable } : \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \right\}$$

$$B_1 = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ derivable } : \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \right\}$$

$$B_2 = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ derivable } : \text{ existe } a \in \mathbb{R} \text{ con } \lim_{x\to+\infty} f(x) = a \right\}$$

$$C_1 = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ derivable } : \lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty \right\}$$

$$C_2 = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ derivable } : \text{ existe } a \in \mathbb{R} \text{ con } \lim_{x\to-\infty} f'(x) = a \right\}$$

(A) Existe $f \in A \setminus (B_1 \cup B_2 \cup C_1 \cup C_2)$
(B) $A \subset B_1$ y existe $f \in A \setminus (C_1 \cup C_2)$
(C) $A \subset B_1 \cup C_1$ y existe $f \in A \setminus B_1$
(D) $A \subset C_1$ y existe $f \in A \setminus (B_1 \cup B_2)$
(E) $A \subset B_1$ y $A \subset C_1 \cup C_2$

5. La integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin(x)\, dx$ vale

(A) $\frac{1}{5}\left(1 + 2e^{\pi}\right)$
(B) $\frac{1}{5}\left(1 + e^{\pi}\right)$
(C) $\frac{1}{2}$
(D) $\frac{1}{2}(1 + e^{\pi})$
(E) $\frac{1}{3}(1 + 2e^{\pi})$

6. La integral $\displaystyle\int_1^{4} \arctan\left(\sqrt{x}\right)\, dx$ vale

(A) $2\arctan(2) - \arctan(1) - \frac{1}{2}(\log\left(\frac{5}{2}\right))$
(B) $\frac{1}{2}\left(3 - \log\left(\frac{5}{2}\right)\right)$
(C) $\arctan(2) - \arctan(1)$
(D) $\frac{1}{2}(3 - \arctan(2) + \arctan(1))$
(E) $5\arctan(2) - 2\arctan(1) - 1$