Universidad de la República **Cálculo diferencial e integral en una variable**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo semestre de 2020**

Tarea: Rectificación de una curva

La tarea consta de 7 preguntas, 5 marcadas el indicativo (*) y una más por sección a elección del estudiante o grupo de estudiantes que realize la tarea.

Aunque una pregunta no haya sido realizada, pueden usar el resultado de la misma en las preguntas siguientes.

El objetivo de la tarea es definir la longitud de una curva descrita por una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, y desarrollar herramientas para calcular dicha longitud.

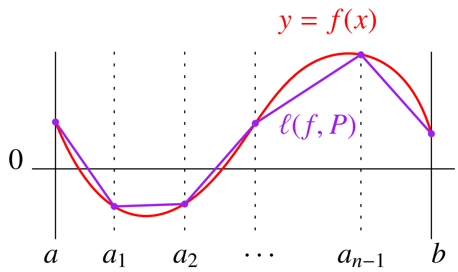
1. Definición de la longitud de una curva

Recordatorio: Se recuerda que la distancia entre dos puntos $A = (x, y)$ y $A' = (x', y')$ cualesquiera del plano $\mathbb{R}^2$ está definida por $d(A, A') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$. Las propiedades más destacables de la distancia en $\mathbb{R}^2$ son:

(1) $d(A, A') = 0$ si y sólo si $A = A'$ (distancia nula)
(2) $d(A, A') = d(A', A)$ (simetría de la distancia)
(3) $d(A, A'') \leq d(A, A') + d(A', A'')$ (desigualdad triangular)

Definición de los números $\ell(f, P)$ Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua definida en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (con $a < b$). A cada partición $P = \{a_0, \ldots, a_n\}$ ($n \geq 1$) del intervalo $[a, b]$, se asocia el número $\ell(f, P) > 0$ definido por

$$\begin{aligned}\ell(f, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} d\Big((a_i, f(a_i)),\ (a_{i+1}, f(a_{i+1}))\Big)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(a_{i+1} - a_i)^2 + (f(a_{i+1}) - f(a_i))^2}\,.\end{aligned}$$



Observar que $l(f, P)$ es la longitud de la línea poligonal que pasa por los puntos $(a, f(a))$, $(a_1, f(a_1)), \ldots, (a_{n-1}, f(a_{n-1})), (b, f(b))$.

Pregunta 1.1 Calcular los números $\ell(f, P)$ y $\ell(f, Q)$ en el caso particular donde $[a, b] = [0, 2]$, $f(x) = x^2$, $P = \{0, 1, 2\}$ y $Q = \{0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$. ¿Cuál de los valores es mayor?

Pregunta 1.2(*) Dadas particiones $P, P' \subset [a, b]$ tales que $P' = P \cup \{a'\}$, con $a' \notin P$, demostrar que $\ell(f, P) \leq \ell(f, P')$. (Sugerencia: usar las propiedades de distancia mostradas en el recordatorio.) Deducir más generalmente que si $P, Q \subset [a, b]$ son dos particiones tales que $P \subset Q$, entonces se tiene que $\ell(f, P) \leq \ell(f, Q)$.

Definición de la longitud $\ell(f,[a,b])$ Se dice que la función f es *rectificable* en el intervalo $[a,b]$ cuando el conjunto de todos los números $\ell(f,P)$ (donde P recorre todas las particiones de $[a,b]$) está acotado superiormente. Cuando es el caso, se llama *longitud* de f en el intervalo $[a,b]$ y se escribe $\ell(f,[a,b])$ el supremo de dicho conjunto, es decir:

$$\ell(f,[a,b]) \;=\; \sup\{\ell(f,P) \;:\; P \text{ partición de } [a,b]\}\,.$$

Pregunta 1.3(*) Dado un punto $c \in (a,b)$, probar que si f es rectificable en el intervalo $[a,c]$ y en el intervalo $[c,b]$ entonces f es rectificable en el intervalo $[a,b]$ y además

$$\ell(f,[a,b]) \;=\; \ell(f,[a,c]) + \ell(f,[c,b])\,.$$

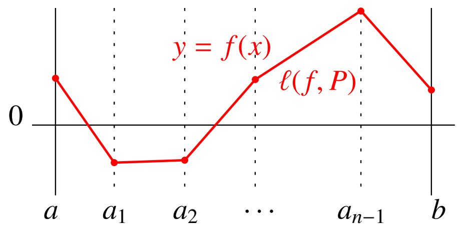
Pregunta 1.4 En esta pregunta, se supone que la función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es afín a trozos, en el sentido en que existe una partición $P = \{a_0,\ldots,a_n\} \subset [a,b]$ tal que para todo índice $0 \le i < n$ y para todo $x \in [a_i,a_{i+1}]$, tenemos que

$$f(x) \;=\; f(a_i) + k_i(x - a_i),$$

escribiendo

$$k_i \;=\; \frac{f(a_{i+1}) - f(a_i)}{a_{i+1} - a_i}$$

la pendiente del segmento correspondiente.



Se considera la función $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) \;=\; \begin{cases} \sqrt{1 + f'^2(x)} & \text{si } x \in (a_i,a_{i+1}),\ 0 \le i < n \\ 0 & \text{si } x \in P \end{cases} \qquad (x \in [a,b])$$

Demostrar que $\ell(f,[a,b]) \;=\; \displaystyle\int_a^b h(x)\,dx.$

Observación Esta última pregunta nos da una fórmula integral sencilla (basada en la derivada f') para calcular la longitud de la función f en el intervalo $[a,b]$. En la siguiente sección veremos que esta fórmula integral se generaliza a más funciones.

2. Fórmula integral de la longitud de f

En esta sección, se supone que la función f es continua, derivable y con derivada f' continua en el intervalo $[a,b]$. Además, se supone que la función f es monótona creciente, de tal modo que $f'(x) \ge 0$ para todo $x \in [a,b]$. Se considera la función $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$h(x) \;=\; \sqrt{1 + f'^2(x)} \qquad (x \in [a,b])$$

Pregunta 2.1 Demostrar que para toda partición $P = \{a_0,\ldots,a_n\}$ del intervalo $[a,b]$ y para todo índice $0 \le i < n$, tenemos que

$$(a_{i+1} - a_i)\inf(f',[a_i,a_{i+1}]) \;\le\; f(a_{i+1}) - f(a_i) \;\le\; (a_{i+1} - a_i)\sup(f',[a_i,a_{i+1}])\,.$$

Pregunta 2.2(*) Probar que para toda partición $P \subset [a, b]$, se tiene que

$$S_*(h, P) \ \leq \ \ell(f, P) \ \leq \ S^*(h, P)\,.$$

(Sugerencia: probar la desigualdad para cada subintervalo de la partición.)

Pregunta 2.3 Demostar que para todas particiones $P, Q \subset [a, b]$, tenemos que:

$$\ell(f, P) \ \leq \ S^*(h, Q)\,.$$

(Sugerencia: considerar la partición $P \cup Q$.)

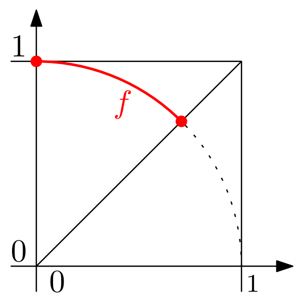
Pregunta 2.4(*) Deducir de los resultados anteriores que la función f es rectificable, y su longitud está dada por:

$$\ell(f, [a, b]) \ = \ \int_a^b h(x)\,dx \ = \ \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\,.$$

Pregunta 2.5 (Aplicación)(*) Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) \ = \ \sqrt{1 - x^2} \qquad (x \in [0, 1])$$

y cuya gráfica es el cuarto de circunferencia unitaria del primer cuadrante. Usando la fórmula integral establecida en los ítems anteriores[1], calcular la longitud del octavo de circunferencia:



[1] Que también se aplica a las funciones monótonas decrecientes.