Ejercicio 2) 6) d

(asumimos partes a, b, c)

1) Hay que ver que $\forall x \in \mathbb{R}$, el conjunto $A_x = \{ f_3(z) : z \leq x \}$ tiene supremo.

$\longrightarrow$ $A_x \neq \emptyset$ porque hay racionales $\leq x$.

$\longrightarrow$ Para ver que A_x está acotado superiormente, tomemos cualquier $\frac{p}{q} \geq x$, y como f_3 es creciente

$f_3(p/q)$ es mayor o igual que todo elemento de A_x.

Como A_x no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

Por lo tanto f está definida.

3) f creciente

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $x_1 < x_2$.
Queremos ver que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

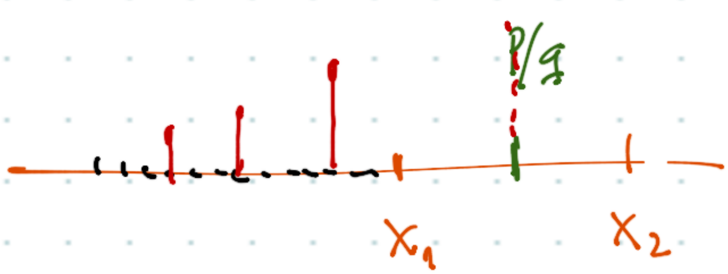
$$A_{x_1} = \{ y \in \mathbb{R} : y = f_3(z) \text{ con } z \leq x_1 \}$$
$$A_{x_2} = \{ y \in \mathbb{R} : y = f_3(z) \text{ con } z \leq x_2 \}$$

Tomamos $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$: $x_1 < \frac{p}{q} < x_2$.

Como f_3 es creciente (en $\mathbb{Q}$)

$$f_3(p/q) \geq f_3(z) \quad \forall z \in \mathbb{Q},\ z \leq x_1$$

$$\Longrightarrow f_3(p/q) \geq \sup \{ f_3(z) : z \in \mathbb{Q},\ z \leq x_1 \}$$
$$= f(x_1)$$



Por otro lado $f_3\left(\frac{p}{q}\right) \in A_{x_2}$

$$\Rightarrow f_3(p/q) \leq \sup A_{x_2} = f(x_2)$$

Por lo tanto $f(x_2) \geq f(x_1)$ $\boxtimes$

5) Queremos ver que:

$$a \in \mathbb{R}, \quad \sup\{f(x) : x < a\} =$$
$$= f(a) = \inf\{f(x) : x > a\}$$

Observar que:

$$\{f_3(x) : x \in \mathbb{Q} \text{ y } x \leq a\} \subseteq \{f(x) : x \leq a\}$$

Por lo tanto:

$$f(a) = \sup\{f_3(x) : x \in \mathbb{Q} \text{ y } x \leq a\} \leq$$
$$\leq \sup\{f(x) : x \leq a\}$$

Además como f creciente:

si $x < a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$

Por lo tanto $f(a) = \sup\{f(x) : x < a\}$

Veremos ahora que

$$f(a) = \inf\{f(x) : x > a\}$$

- Como f es creciente $f(a) \leq \inf\{f(x) : x > a\}$ (convencerse!)

Veamos que vale la igualdad:

Consideremos $f(a+\frac{1}{n})$ con $n \in \mathbb{N}$

Observe que a medida que n crece

$a + \dfrac{1}{n}$ se va pareciendo a a.

Por la parte 4)

$$f\left(a+\frac{1}{n}\right) = f(a)\, f\left(\frac{1}{n}\right)$$

Veamos que $f\left(\frac{1}{n}\right)$ se va pareciendo a 1 a medida que n crece:

Según las partes anteriores

$$f(1/n) = \sup\{y \in \mathbb{R} : y^n \leq 2\}$$
$$= \sqrt[n]{2}.$$

A medida que n crece

$\sqrt[n]{2}$ se acerca a 1

(ésto lo pueden chequear

por ejemplo en la página

de wolfram alpha).

Concluimos que a medida

que n crece,

$f\left(a+\frac{1}{n}\right)$ se va pareciendo a $f(a)$

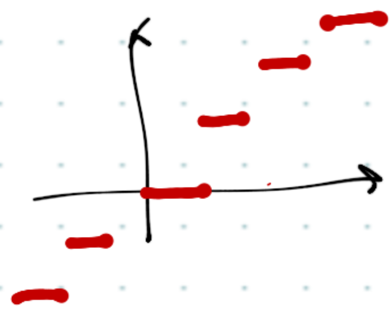
y por lo tanto. $f(a)=\inf\{f(x): x>a\}$

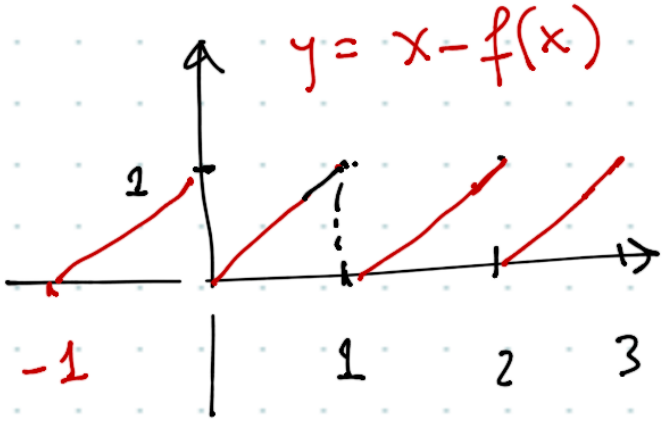
$\boxtimes$

Exercício 2) 2)

$f(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \,/\, n \leq x\} = \lfloor x \rfloor$

(parte entera).





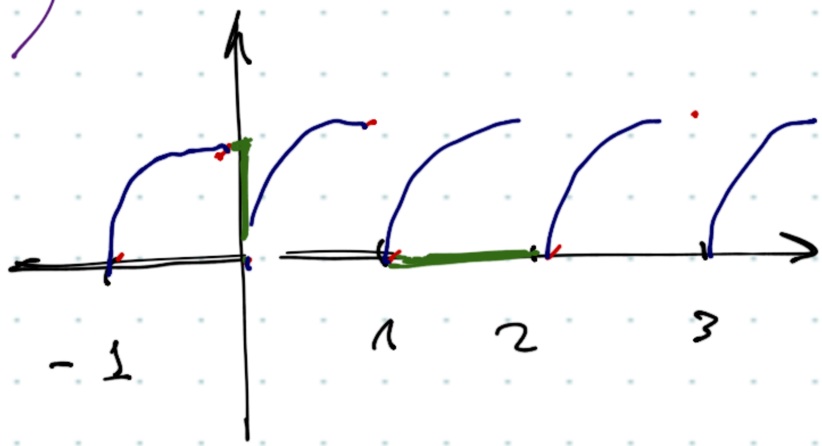
x	$x - f(x)$
$-0{,}1$	$0{,}9$
$-0{,}2$	$0{,}8$
$-0{,}3$	$0{,}7$
$\vdots$	$\vdots$
$-0{,}9$	$0{,}1$

$\lfloor -0{,}1 \rfloor = -1$

$-0{,}1 - \lfloor -0{,}1 \rfloor = 0{,}9$

$$\boxed{\begin{array}{c} x \in (-1, 0) \\ x - f(x) = 1 + x \end{array}}$$

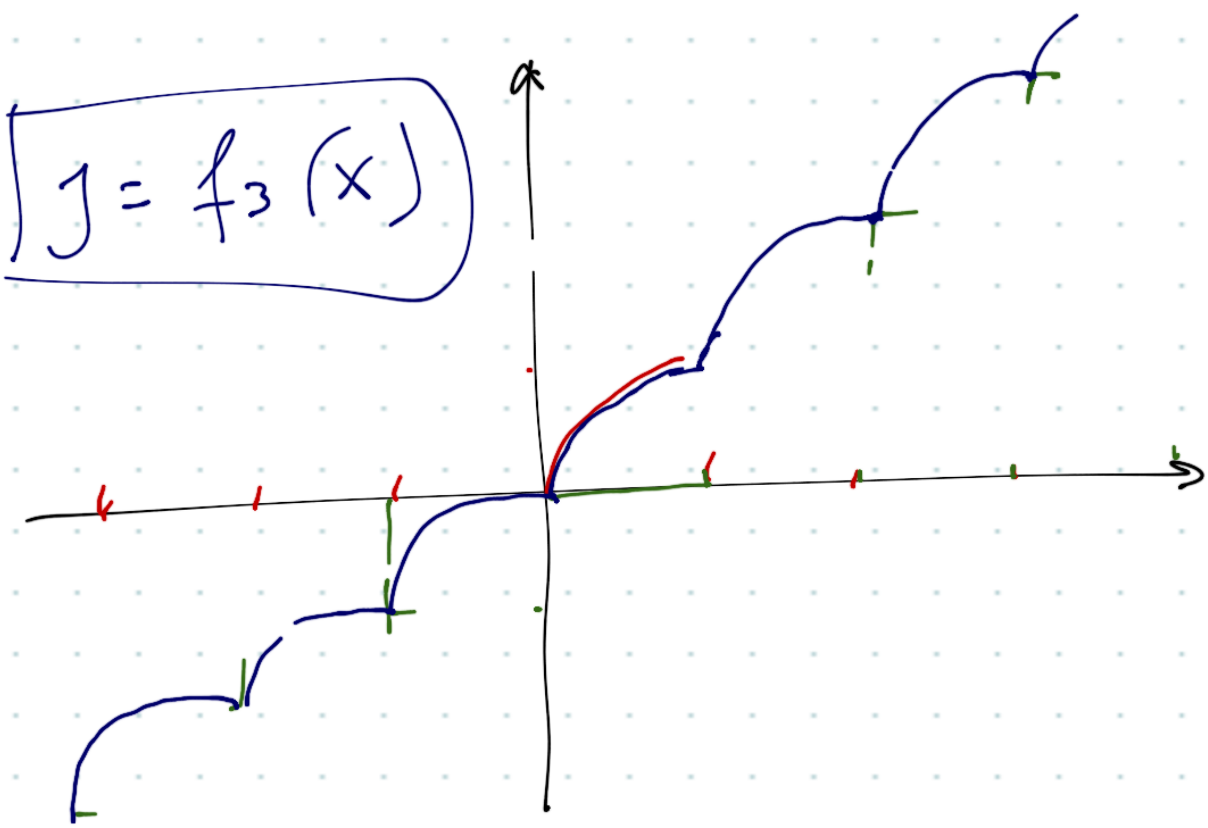
c)



$$- \quad f([n, n+1]) = [0, 1) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

d)

$$\boxed{y = f_3(x)}$$



$$f_3(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$

2) 4) $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente crecientes entonces $f \circ g$ y $g \circ f$ también.

dem: Sean $x, y \in \mathbb{R}$: $y > x$.
Como f creciente $f(y) > f(x)$ y como g es creciente, $g(f(y)) > g(f(x))$.

Como g creciente $g(y) > g(x)$
y como f creciente $f(g(y)) > f(g(x))$

Por lo tanto $f \circ g$ es creciente.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente.

$A = \{ f(x) : x \in [a,b] \}$ está acotado

y además $\sup(A) = f(b)$.

dem:

Como todos los $x \in [a,b]$ son menores o iguales a b y f es creciente

$f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a,b]$

Como $f(b) \in A$, es MÁXIMO (en particular es supremo)