Práctico Semana 02

1. Propiedades básicas de los números reales

1. Demostrar que:

   a) Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$.

   b) Si $a < b$ entonces $-b < -a$.

   c) Si $0 < a \leq b$ entonces $a^2 \leq b^2$.

   d) Si $a, b \geq 0$ y $a^2 < b^2$ entonces $a < b$.

   e) Si $0 \leq x < y$ entonces $x^3 \leq y^3$.

   f) $-b = (-1)b$. Es decir el opuesto de b es igual a b por el opuesto de 1.

   g) $1 > 0$.

   h) Si $a > 1$ entonces $a^2 > a$.

2. **Desigualdad triangular**

   Probar las siguientes desigualdades asociadas a la desigualdad triangular.

   a) $|a + b| \leq |a| + |b|$ *b*) $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$

   c) $|a + b| \geq |a| - |b|$ *d*) $|ab| \leq a^2 + b^2$

3. **Funciones monotonas**

   Dada una función $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ decimos que f es monótona creciente si para todo par $x, y \in U$ tal que $x \leq y$ se tiene que $f(n) \leq f(m)$. Además decimos que es esctrictamente monotona creciente si para todo par $x, y \in U$ tal que $x < y$ se tiene que $f(x) < f(y)$.

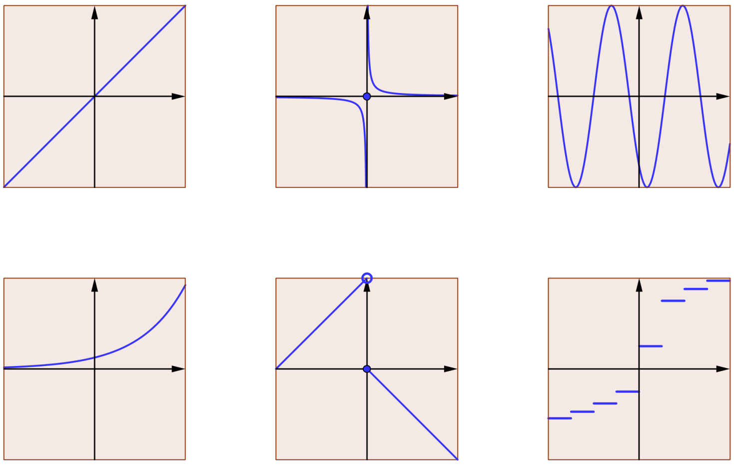
   De forma análoga se define monótona decreciente y estrictamente monótona decreciente.

   a) Deducir que si f es estrictamente monótona creciente entonces es monótona creciente.

   b) En los siguientes ejemplos probar a partir de los axiomas y las propiedades del ejercicio 1 (mencionando explicitamente que se usa en cada paso) si las funciones son monotonas crecientes, estrictamente crecientes, monotonas decrecientes, estrictamente decrecientes o de ninguna de estas categorias.

      1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$
      2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$
      3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$
      4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
      5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

c) Determinar a partir del gráfico cuales de las siguientes funciones son monotonas



4. **Funciones lipchizianas**

   Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice lipchiziana si existe un $K \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ para todo par $x, y \in \mathbb{R}$. Bosquejar las siguientes funciones y probar que son determinar cuáles son lipchizianas.

   $$a)\quad f(x) = x \qquad b)\quad f(x) = |x| \qquad c)\quad f(x) = x^2 \qquad d)\quad f(x) = 4x - 3$$

   e) Probar que si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones lipchizianas entonces $f \circ g$, $f + g$ son lipchizianas. Estudiar qué ocurre con fg.

   f) Interpretar geométricamente la condición de que f sea lipchiziana.

2. Inducción completa

1. Demostrar las siguientes igualdades usando el método de inducción completa:

$$a)\quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad b)\quad \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2 \qquad c)\quad \sum_{i=0}^{n} 2i = n(n+1)$$

$$d)\quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \qquad e)\quad \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

$$f)\quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 \qquad g)\quad \sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1 \qquad h)\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$i)\quad \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{n+1}{2n+3} \qquad j)\quad \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{i}\right) = n+1$$

$$k)\quad \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \text{ para todo } n \geq 2 \qquad l)\quad \prod_{k=1}^{n} \left(1 + x^{2^{k-1}}\right) = \frac{1 - x^{2^n}}{1 - x} \text{ para } x \neq 1$$

2. Pruebe que dados $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

3. Demostrar las siguientes desigualdades usando el método de inducción completa:

$$a)\quad (1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x > -1, \forall n \in \mathbb{N} \qquad b)\quad n-2 < \frac{n^2-n}{12},\ \forall n > 10$$

$$c)\quad \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 2 \qquad d)\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n} \quad \forall n > 1$$

$$e)\quad 2^n < n!,\ \forall n > 3 \qquad f)\quad n^2 < 2^n,\ \forall n > 4$$

4. *a*) Probar que

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \text{ para todo } x \neq 1$$

   b) Probar que dados $0 \leq x < y$ se verifican las desigualdades

$$(y-x)x^n \leq \frac{y^{n+1}-x^{n+1}}{n+1} \leq (y-x)y^n$$

5. La media geométrica y aritmética entre dos números no negativos se define como $A = \frac{a+b}{2}$ y $G = \sqrt{ab}$ respectivamente.

   a) Probar que si $0 < a < b$ entonces $a < G < A < b$.
   Estas medias se pueden generalizar tomando n números. Dados $a_1, \ldots, a_n$ números reales tal que $a_i \geq 0$ para todo i, definimos

$$\text{media aritmética} \quad A_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \qquad \text{media geométrica} \quad G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

   b) Utilizando el hecho de que $G_2 \leq A_2$ demuestre por inducción en k que $G_n \leq A_n$ para $n = 2^k$.

   c) Suponga que $a_1 < A_n$. Probar que existe a_i tal que $a_i > A_n$ (por conveniencia diremos que es a_2). Sea $\tilde{a}_1 = A_n$ y $\tilde{a}_2 = a_1 + a_2 - \tilde{a}_1$. Demostrar que $\tilde{a}_1\tilde{a}_2 \geq a_1 a_2$. ¿Por que la iteracion de dicho proceso un número suficiente de veces acaba demostrando que $G_n \leq A_n$?

6. Probar que dado b un entero positivo, entonces para cada $n \geq 0$ existen enteros no negativos Q y R tales que:

$$n = Qb + R, \quad 0 \leq R < b.$$

7. Probar que la ecuación $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n+2}{2}$ cumple el paso inductivo para todo n y sin embargo la igualdad no se cumple para ningún n.

8. Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ funciones probar que si $f(i) \leq g(i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ entonces $\sum_i^n f(i) \leq \sum_i^n g(i)$.
   De un ejemplo de funciones f, g tal que $\sum_i^n f(i) \leq \sum_i^n g(i)$ y sin embargo exista un $n_0 \in \mathbb{N}$ con $f(n_0) > g(n_0)$.

9. **Funciones monótonas**

   a) Probar que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es monótona creciente si solo si $f(n) \leq f(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   b) Mostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - \lfloor x \rfloor$ verifica que $f(x) \leq f(x+1)$ sin embargo no es monótona creciente.

10. **Triángulo de Pascal**

    El triángulo de Pascal, es un triángulo de números, infinito y definido por inducción.

    La primer fila contiene un único número, que será 1, y luego cada fila tendra un elemento más que la anterior.

    Notaremos $f(n, i)$ el valor del lugar i de la fila n. Para que tenga sentido debe ser $i \leq n$.

    La definición entonces es:

- Paso base: $f(0,0)=1$
- Paso inductivo:
  - $f(n+1,0)=f(n+1,n+1)=1$
  - Si $1<i<n+1$, $f(n+1,i)=f(n,i)+f(n,i-1)$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Las primeras 5 filas del triángulo de Pascal

a) Probar que

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i} f(n,i)$$

b) Deducir que
- $\sum_{i=0}^{n} f(n,i)=2^n$
- $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f(n,i)=0$
- $f(n,i)=f(n,n-i)$

c) Se define el numero combinatorio $\binom{n}{i}$, donde $0\leq i\leq n$ como $\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$ (recordar que $0!=1$).
Probar que

$$\binom{n+1}{i+1}=\binom{n}{i+1}+\binom{n}{i}$$

Deducir que $f(n,i)=\binom{n}{i}$

d) Suponga que tiene una bolsa con n bolillas distinguidas, por ejemplo numeradas del 1 al n. Probar que $f(n,i)$ es la cantidad de maneras de tomar i boillas de las n. Deducir que la cantidad de subconjuntos de un conjunto A de n elementos es 2^n.

11. Sean $x_1,\dots,x_n$, $y_1,\dots,y_n$ números reales positivos. Demostrar que

$$\text{mín}\left\{\frac{x_1}{y_1},\dots,\frac{x_n}{y_n}\right\}\leq\frac{x_1+\dots+x_n}{y_1+\dots+y_n}\leq\text{máx}\left\{\frac{x_1}{y_1},\dots,\frac{x_n}{y_n}\right\}$$

3. Polinomios

1. Sea S un polinomio de grado n.

a) Dado P polinomio lineal ($P(x)=ax+b$ con $a\neq 0$) existen un polinomios Q y una contante r tal que

$$S=PQ+r \ \text{ y } \ \text{grado}(Q)=\text{grado}(S)-1$$

b) Descomposición en raíces
Utilizar la parte a) para deducir que si α es una raíz de S entonces $S(x)=Q(x)(x-\alpha)$ donde grado$(Q)=$ grado$(S)-1$
Concluir que si S tiene n raices distintas entonces

$$S(x)=\alpha\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$$

donde $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, α_i raíz de S y $\alpha_i\neq\alpha_j$ para todo para $i\neq j$

c) Repetir la parte a) para un polinomio P genérico, esto es, existen polinomios Q, R tal que

$$S = PQ + R, \ \text{grado}(P) + \text{grado}(Q) = \text{grado}(S) \text{ y } \ \text{grado}(R) < \text{grado}(P)$$

2. Si bien no hay un algoritmo para calcular raíces a polinomios genéricos de grado mayor igual a 5, se puede a veces identificar algunas raíces. Por ejemplo, si el polinomio no tiene término independiente, entonces 0 es raíz.

   En este ejercicio se estudiara el problema de encontrar raíces en algunos polinomios enteros. Sea $S = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ un polinomio enteros de grado n, esto es $a_i \in \mathbb{Z}$ para todo i y $a_n \neq 0$

   a) Probar que si $n = 1$ entonces S tiene una raíz racional. Si además $a_1 = \pm 1$ entonces la raíz es entera.
   b) Probar que si $n = 2$ entonces S no puede tener un única raíz racional simple.
   c) Reproduciendo el razonamiento del ejercicio anterior probar que si $\alpha \in \mathbb{Z}$ es una raíz de S entonces $S(x) = Q(x)(x - \alpha)$ donde Q también es un polinomio entero. Deducir que α divide a a_0.
   d) Sea α raíz de S tal que $\alpha = \frac{p}{q}$ fracción irreducible, es decir $f\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{p^i}{q^i} = 0$. Probar que p es raíz del polinomio $\hat{S}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i q^{n-i} x^i$. Deducir que $p | a_0$ y $q | a_n$.
   e) Deducir que si $a_n = \pm 1$ entonces para todo α raíz se cumple que $\alpha \notin \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.
   f) Calcular las raíces del polinomio $S(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$

3. Sean P, Q dos polinomios y $k = \text{máx}\{\text{grado}(P), \text{grado}(Q)\}$. Probar que si existen $k+1$ puntos distinos x_i tal que $P(x_i) = Q(x_i)$ entonces $P = Q$

4. Geometría

En esta sección no se esperan pruebas con demasiada formalidad en los ejercicios, si no que se entienda los problemas geométricos y a partir de inducción completa dar algún boceto de demostración.

1. Polígonos convexos

   a) Probar que los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados suman $(n - 2)\pi$.
   b) Probar que un polígono convexo de n lados tiene $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

2. Regla y compás

   a) Dado un segmento de longitud unidad, entonces el segmento de longitud $\sqrt{n}$ se puede construir con regla y compás para cada entero positivo n. (Sugerencia: ver como se construye el segmento de longitud $\sqrt{2}$.)
   b) Probar que con regla y compás se pueden obtener todos los ángulos de la forma $\frac{\pi}{2^n}$

3. Probar que n rectas en el plano, tales que dos cualesquiera de ellas no son paralelas y tres cualesquiera de ellas no tienen un punto en común, determinan $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ regiones.

4. Se tienen n circunferencias en el plano. Demostrar que se puede pintar las regiones delimitadas por las circunferencias con 2 colores, de forma que dos secciones adyacentes sean de color distinto. ¿Vale lo mismo para cuadrados?

5. Aplicaciones

1. **Torres de Hanói**

"Las torres de Hanói" es un rompecabezas que consiste en 3 ejes con n anillos concéntricos de diámetro decreciente, todos ellos colocados en el segundo eje. El juego consiste en pasar todos los anillos desde el eje ocupado a uno de los otros ejes vacíos, moviendo de a un anillo a la vez. Solo puede moverse el anillo superior de una pila, y solo puede colocarse en otro eje siempre y cuando no se sitúe sobre un anillo de diámetro inferior.

Demuestre que el juego puede resolverse mediante $2^n - 1$ desplazamientos, y que esto no puede hacerse en menos desplazamientos.

2. Se desea hacer un programa que busque una palabra en un diccionario, para esto se necesitan hacer comparaciones hasta encontrarla. Dotaremos de un orden a las palabras, de forma que dadas dos palabras P y Q se tiene que P es menor a Q si aparece antes en el diccionario

El proceso para comparar dos palabras es inductivo, Dadas dos palabras P y Q si la primer letra de de P aparece antes en el abecedario que la primer letra de Q entonces decimos que P es menor a Q (aparece antes en el diccionario).

En caso de que la primer letra sea igual se comparan las segundas y asi inductivamente.

Si el proceso anterior no termino y llegamos a la última letra de alguna de las palabras, hay dos opciones o son la misma palabra o una palabras contiene mas letras que la otra. En este último caso las palabra con mas letras es la mayor.

Ejemplos: Casa < Casas; Ave < Pez.

A este orden se le llama orden lexicográfico.

En este problema asumiremos que comparar 2 palabras cualesquiera tiene costo 1.

Notemos n la cantidad de palabras del diccionario, P la palabra a buscar y $p(k)$ la funcion que indica el lugar del diccionario donde esta la palabra de la k-esima comparacion Un programador ofrece dos programas A y B para solucionar el problema.

A)
- En el primer paso se compara con la palabra 1, es decir $p(1) = 1$, si es igual termina el programa, Sino se itera el paso inductivo.
- En el paso k se compara con la k-esima palabra. Si es igual termina el programa sino compara con la siguiente.

B)
- En el primer paso se compara con la palabra que esta en el lugar $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, es decir $p(1) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ si es igual termina el programa, Sino se itera el paso inductivo.
- Si en el paso $k-1$ la comparación dio que la palabra P es menor a la que esta en el lugar $p(k-1)$ entonces $p(k) = \left\lfloor p(k-1) - \frac{n}{2^k} \right\rfloor$. Si la comparacion dio que la palabra P es mayor entonces $p(k) = \left\lceil p(k-1) + \frac{n}{2^k} \right\rceil$

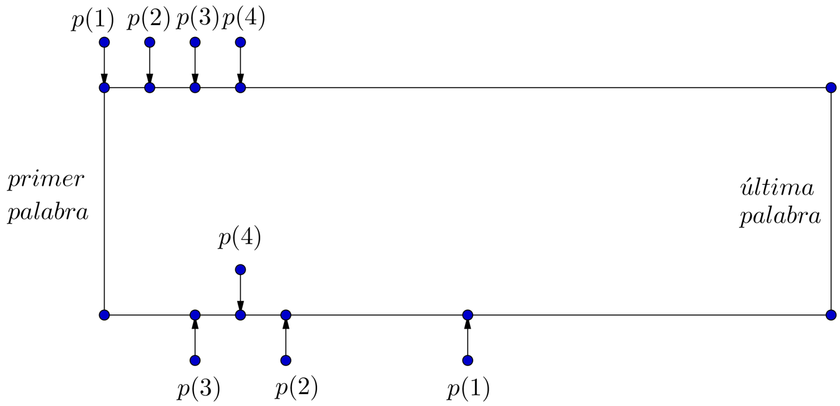


Figura 1: Iteracciones para encontrar la cuarta palabra en un diccionario de 17 palabras

a) Acotar aproximadamente el costo mínimo y máximo en cada caso.

b) Discutir sobre cual metodo sera mas eficiente.

c) El diccionario de la RAE tiene aproximadamente 93111 palabras. Cual seria el costo en este caso.

d) En Uruguay hay 900.528 lineas de telefonia fija residencial (Informe Ursec 6/2015). Estimar el costo de ambos algoritmos.

Ejercicios mínimos obligatorios

- Ejercicio 1.1 y 1.3.b, una parte de cada uno
- Ejercicio 1.2 una parte
- Ejercicio 1.4
- Ejercicio 2.1 y 2.3, una parte por fila
- Ejercicio 2.7
- Ejercicio 2.10 o ejercicio 3.1
- 2 ejercicios de la sección 4