Práctico Semana 01

1. Repaso

1. Calcular.

$a)\ \left|\dfrac{7-12}{12-7}\right| \qquad b)\ \left|\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{5}\right|+\left|-\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{5}\right| \qquad c)\ \left|\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{5}\right|-\left|-\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{5}\right| \qquad d)\ \left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\right|$

$e)\ \displaystyle\sum_{k=0}^{10} k \qquad f)\ \sum_{k=2}^{4} k^2 \qquad g)\ \sum_{k=1}^{4} \frac{k}{k+1} \qquad h)\ \left|\sum_{k=1}^{5} \frac{(-1)^k}{k}\right| \qquad i)\ \sum_{k=1}^{5} \left|\frac{(-1)^k}{k}\right|$

$j)\ \displaystyle\prod_{k=1}^{3}(2k+1) \qquad k)\ \prod_{k=0}^{4} 2^k \qquad l)\ \prod_{k=1}^{5} \frac{k+1}{k}$

2. Calcular las raíces de los siguientes polinomios.

$a)\ x^2-3x+2 \qquad b)\ x^2-6x+9 \qquad c)\ x^2+1 \qquad d)\ x^6-1 \qquad e)\ (x^2+2x+1)(x^2-4x+3)$

$f)\ x^2+x+1 \qquad g)\ 2x^3+7x^2+6x \qquad h)\ x^2+6x+4 \qquad i)\ (x-1)(x-1)(x+3)(x+4) \qquad j)\ x^4-x^2-2$

3. Calcular las raíces de los siguientes polinomios.

   a) $P(x) = x^3 + 2x$
   b) $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, sabiendo que 2 es raíz.
   c) $P(x) = 8x^3 + 14x^2 - 5x - 2$ sabiendo que $\frac{1}{2}$ es raíz.

4. Determinar para qué valores de x son ciertas las siguientes inecuaciones.

$a)\ 4x-2>3 \qquad b)\ x^2+4x+1\geq 0 \qquad c)\ x(x-1)(x-2)(x-3)<0$

$d)\ \dfrac{2-x}{1+x}\leq 0 \qquad e)\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}>0 \qquad f)\ \dfrac{x}{x-1}<\dfrac{2x+1}{x}$

$g)\ \sqrt{x+4}<x \qquad h)\ \sqrt{x^2+1}>2x-3 \qquad i)\ \sqrt{x+n}-\sqrt{x}>1 \text{ con } n\in\mathbb{N}$

$j)\ |2x-5|<|3x+4| \qquad k)\ x^2-5|x|+4\geq 0 \qquad l)\ 3|x|-|x-2|>2 \qquad m)\ |nx|>x^2 \text{ con } n\in\mathbb{N}$

2. Conjuntos

1. Determinar cuántos subconjuntos de $A = \{1,2,a,b,c\}$ tienen 2 elementos. Repetir lo mismo para 3 elementos.

2. Sean A, B y C los conjuntos dados por $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,4,5,6,7\}$ y $C = \{7,8,9\}$
   Calcular:

$a)\ A\cap B \qquad b)\ B\cap C \qquad c)\ A\cap C \qquad d)\ A\cap B\cap C$

$e)\ A\cup B \qquad f)\ B\cup C \qquad g)\ A\cup C \qquad h)\ A\cup B\cup C$

$i)\ A\cup(B\cap C) \qquad j)\ A\cap(B\cup C)$

$k)\ (A\setminus B)\cup(B\setminus A) \qquad l)\ (A\setminus C)\cup(C\setminus A) \qquad m)\ A\cup(B\setminus C)$

3. Determinar todos los elementos de los siguientes conjuntos:

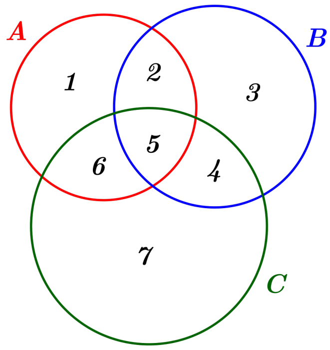
$a)\quad \{n \in \mathbb{N} : n \leq 5\} \qquad b)\quad \{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 12\} \qquad c)\quad \{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\} \qquad d)\quad \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 2 = 0\}$

4. Determinar todos los elementos de los siguientes conjuntos:

$$a)\ \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) : n \in \mathbb{N}\right\} \qquad b)\ \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) : n \in \mathbb{N}\right\} \qquad c)\ \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$d)\ \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) : n \in \mathbb{N}\right\} \qquad e)\ \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$$

5. Sean A, B y C tres conjuntos como en la figura:



Describir las regiones numeradas a partir de los conjuntos A, B y C y las operaciones binarias $\cup$, $\cap$ y $\setminus$.

6. Sean A y B dos conjuntos finitos. Ordene los siguientes conjuntos según la cantidad de elementos que tengan, en forma creciente:

$$A,\ A \cap B,\ A \cup B,\ \emptyset,\ A \cup (B \setminus A)$$

7. Determinar cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas o falsas. En caso de que una igualdad sea falsa determinar si se da alguna de las inclusiones.

$$a)\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad b)\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$c)\quad A \setminus (B \setminus A) = \emptyset \qquad d)\quad A \setminus (B \cup C) = [(A \setminus B) \cup (A \setminus C)]$$

8. **Producto cartesiano**

   a) Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Listar todos los elementos de $A \times B$ y de $B \times A$.

   b) Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Probar que si $(x, y) \in A \times B$ y además $(x, y) \in B \times A$ entonces $\{x, y\} \subset A \cap B$.

   c) Probar que si $A \times B = B \times A$ entonces $A = B$.

   d) Bosquejar en un par de ejes coordenados (es decir, en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$), los siguientes conjuntos:

$$a)\quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 2\} \qquad b)\quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = -3\}$$

$$c)\quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = 2y\} \qquad d)\quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y - 3\}$$

3. Funciones

1. **Funciones naturales**

   Para las siguientes funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ realizar los bosquejos de los primeros valores.

   $$a)\quad f(n) = n \qquad b)\quad f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \qquad c)\quad f(n) = (-1)^n$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Calcular:

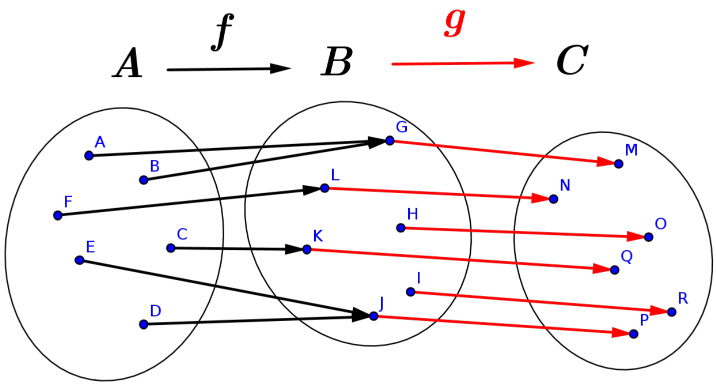
   $$a)\quad f(f(x)) \text{ (¿Para qué } x \text{ tiene sentido?)} \qquad b)\quad f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad c)\quad f(cx)$$

   $$d)\quad f(x_1 + x_2) \qquad e)\quad f(x_1) + f(x_2)$$

   ¿Para que números c existe un número x tal que $f(cx) = f(x)$? (Indicación: hay muchos más de los que podría parecer a primera vista).

   ¿Para qué números c se cumple que $f(cx) = f(x)$ para al menos dos valores distintos de x?

3. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones dadas por el siguiente diagrama:



   a) Calcular $g \circ f$

   b) Para las funciones f, g y $g \circ f$, determinar cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

4. Determinar para las siguientes funciones $f : A \to B$ cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:

   $a)$ $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $f(x) = x + 5$ $\quad b)$ $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 5$ $\quad c)$ $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$

   $d)$ $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$ $\quad e)$ $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$ $\quad f)$ $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$

   $g)$ $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(x) = x^3$ $\quad h)$ $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

   $i)$ $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $f(x) = 2^x - 1$ $\quad j)$ $A = \mathbb{R}^+$, $B = \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x - 1$

5. Considere las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ definidas como $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $g(x) = \cos(x)$ y $h(x) = \operatorname{tg}(x)$.

   a) Grafique las funciones f, g y h.

   b) Pruebe que f no es inyectiva y que g no es sobreyectiva. ¿Es h biyectiva? Justifique.

   c) Restrinja el dominio y codominio de f y g para que resulten biyectivas.

6. Para los siguientes pares de funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ calcular $f \circ g$, $g \circ f$ y $f + g$.

   a) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3x - 1$

   b) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^3 - x^2 - 4$

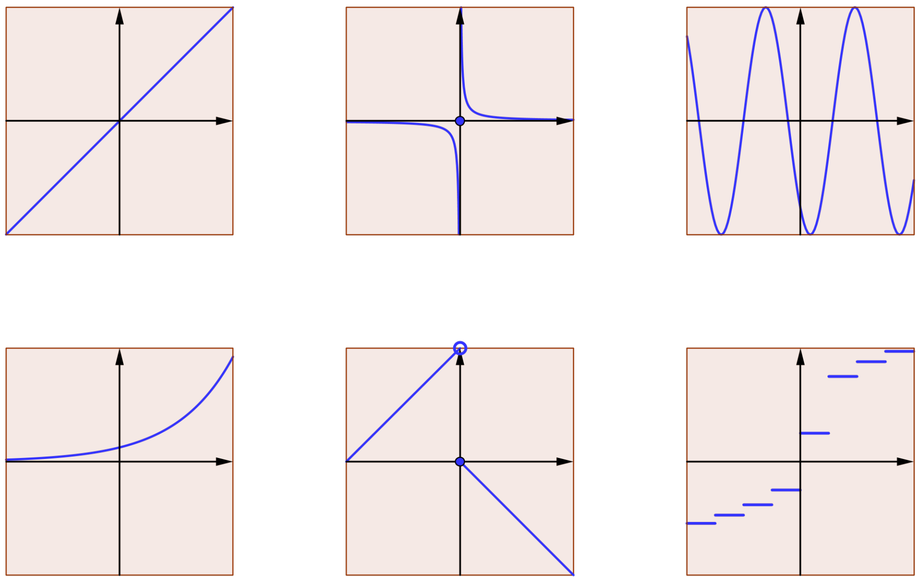
   c) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \leq 0 \\ x-1 & 0 < x \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 2x & 0 < x \end{cases}$

   d) $f(x) = x + 1$, $g(x) = \text{máx}\{1, x-1\}$

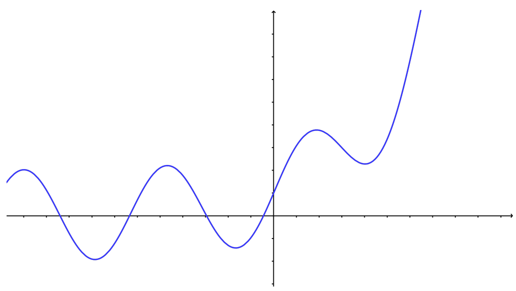
   e) $f(x) = |2x + 1|$, $g(x) = x^2 + x + 1$

   f) $f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & x \leq 0 \\ x-8 & 0 < x < 2 \\ 5 & x \geq 2 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x-1 & x \leq 0 \\ -1 & 0 < x < 2 \\ \frac{1}{x} & x \geq 2 \end{cases}$

7. Determinar para los siguientes bosquejos de funciones cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:



8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico es el siguiente:



   Bosquejar el gráfico de g para las funciones:

   a) $g(x) = f(x) + c$ *b*) $g(x) = f(x + c)$ *c*) $g(x) = |f(x)|$ *d*) $g(x) = f(|x|)$

   e) $g(x) = cf(x)$ *f*) $g(x) = f(cx)$ *g*) $\text{máx}(f(x), f(-x))$

9. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. Probar que:

   a) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

   b) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

10. Sean A, B dos conjuntos no vacíos y $f : A \to B$ una función. Probar que para cualquier par de subconjuntos $A_1, A_2 \subset A$ con $A_i \neq \emptyset$ se tiene que:

    a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

    b) $f(A_i \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

    c) Si f es inyectiva entonces $f(A_i \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

4. Aplicaciones

1. La tarifa actual del taxi en Montevideo es de:

   - Bajada de bandera con 100 metros: \$47,30
   - Ficha cada 100 metros: \$2,74

   a) Llamemos $P(x)$ al precio por recorrer x metros. Graficar la función P.

   b) Estime el costo de ir desde la explanada de la Universidad hasta la Facultad de Ingeniería.

   c) Si por viajar en la noche el conductor nos cobra un 20% de recargo, ¿cambia el bosquejo de la función P?

2. **Temperatura del Aire**

   Sabemos que cuando el aire asciende se dilata. Al dilatarse, se enfría a una razón de 1° C cada 100 m de ascenso.

   a) Si la temperatura del suelo es de unos $20°C$, calcule la función que describe la temperatura para una altura h.

   b) ¿Qué intervalos de temperatura se pueden esperar en un avión que alcanza una altitud máxima de 5 km?

3. **Resistencia de materiales**

   Este ejercicio busca estudiar acotaciones a los tamaños de ciertas estructuras.

   Sea C un cubo de un material determinado de lado L m y de densidad ρ kg/m^3.

   Determinar M la masa del cubo y A el área de la cara inferior como función de L

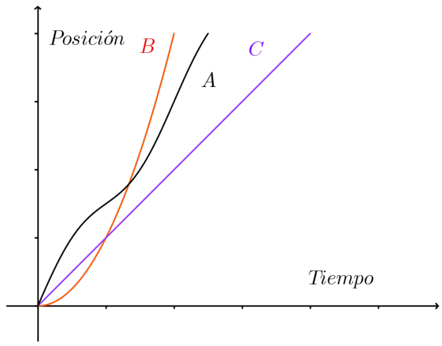
   La presión sobre la cara inferior, ejercida por la tierra del cubo se calcula como $P = \frac{M}{A}$.

   Por ejemplo el acero tiene una resistencia al aplastamiento (la capacidad para soportar la presión) de 36,6 kg/m^2 y una densidad 7850 kg/m^3.

   a) Determinar cuál es el cubo más grande de acero que se puede construir sin que este colapse.

   b) Realizar el mismo estudio para determinar la altura maxima de un cilindro de acero de radio 1m^2. (Se necesitan los datos de volumen del cilindro y area del circulo). ¿Qué ocurre si se duplica el radio de la base? ¿Y si se duplica su suprficie?

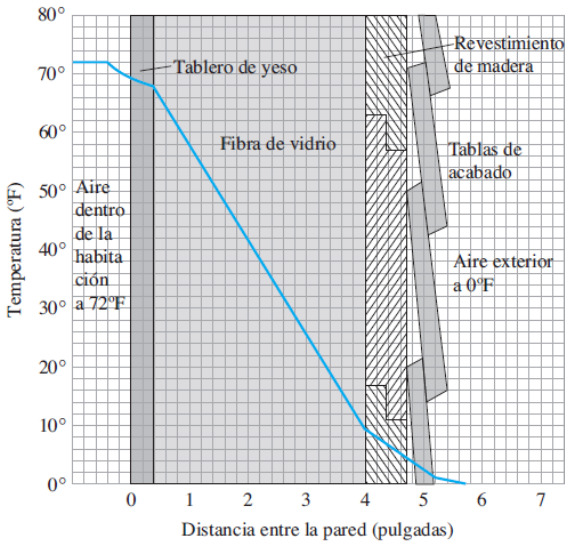
4. Tres personas (A, B y C) participan en un carrera de 100 metros. A partir de las gráficas de sus posiciones en función del tiempo deducir el orden en que llegaron a la meta. ¿Estuvieron durante toda la carrera en el mismo orden?



5. **Aislantes**

   Mida las pendientes de la siguiente figura para estudiar el gradiente de temperatura (es decir, cuántos grados Fahrenheit disminuye la temperatura por pulgada) para estos aislantes:

   - Tablero de yeso
   - Fibra de vidrio
   - Revestimiento de madera



   De acuerdo con la figura, ¿cuál es el mejor aislante? ¿Cuál es el peor? Explique.

Ejercicios mínimos obligatorios

- Ejercicio 1.1: uno por fila.
- Ejercicio 1.2. dos por fila
- Ejercicio 1.3: dos partes
- Ejercicio 1.4: uno por fila.
- Ejercicio 2.1.
- Ejercicio 2.2.
- Ejercicio 2.3: tres ítems.
- Ejercicio 2.4. uno por fila
- Ejercicio 2.5.
- Ejercicio 2.7:
- Ejercicio 2.8.d:
- Ejercicio 3.1 o 3.2:
- Ejercicio 3.3:
- Ejercicio 3.4 dos filas:
- Ejercicio 3.6 partes a o b. Además dos partes mas:
- Ejercicios 3.7 y 3.8:
- Ejercicio 3.9:
- Uno de los siguientes ejercicios 4.1, 4.2, 4.3:
- Uno de los siguientes ejercicios 4.4, 4.5: