

Respuestas Correctas

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5
2	3	1	5	5
Ej. 6	Ej. 7	Ej. 8	Ej. 9	Ej. 10
4	2	4	1	4

Ejercicio 1

Calcular el máximo de la función $f(x) = 2x \log\left(\frac{x}{2}\right)$ en el intervalo $[3, 4]$.

Solución:

La derivada de $f(x) = 2x \log\left(\frac{x}{2}\right)$ es $f'(x) = 2 \log\left(\frac{x}{2}\right) + 2$. Evaluando $f(x)$ en los extremos del intervalo y en las raíces de f' que pertenecen al intervalo se obtiene que el máximo valor es $8 \log(2)$.

Ejercicio 2

Calcular el área del triángulo encerrado en el cuadrante positivo por la tangente a la curva $y = 3e^{-2x}$ en el punto con $x = 1$.

Solución:

La ecuación de la recta tangente es $y = -\frac{1}{e^2}(6x - 6) + \frac{3}{e^2}$. Substituyendo $x = 0$ e $y = 0$ y resolviendo la ecuación, obtenemos que la base y altura del triángulo son $\frac{3}{2}$ y $\frac{9}{e^2}$. Por lo tanto el área es $\frac{27}{4e^2}$.

Ejercicio 3

Calcular $p(1)$ donde p es el polinomio de Taylor en 0 de grado 3 de la función $f(x) = \sin(x) \cos(x)$.

Solución:

Se obtiene $p(x) = -\frac{2x^3}{3} + x$ de donde $p(1) = \frac{1}{3}$.

Ejercicio 4

Calcular el volumen de revolución alrededor del eje x de la función $f(x) = \sqrt{x} + 3$ sobre el intervalo $[0, 1]$. Recordar la fórmula $\int_a^b \pi f(x)^2 dx$ para el volumen de revolución del gráfico de una función positiva sobre un intervalo.

Solución:

El volumen es $\int_0^1 \pi f(x)^2 dx = g(1) - g(0) = \frac{27\pi}{2}$, donde $g(x) = \pi \left(4x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + 9x\right)$.

Ejercicio 5

Calcular $f''(\pi/4)$ donde $f(x) = \int_0^{\sin(2x)} e^{2y^2} dy$.

Solución:

Por el teorema fundamental $f'(x) = 2e^{2\sin^2(2x)} \cos(2x)$ de donde $f''(x) = 16e^{2\sin^2(2x)} \sin(2x) \cos^2(2x) - 4e^{2\sin^2(2x)} \sin(2x)$ y $f''(\pi/4) = -4e^2$.

Ejercicio 6

Calcular la suma superior correspondiente a la integral $\int_0^3 x^2 - 4x + 8 \, dx$ para la partición del intervalo en tres partes iguales.

Solución:

Los puntos de la partición son $\{0, 1, 2, 3\}$ el máximo valor en cada intervalo de la partición correspondiente es 8, 5, 5. Por lo tanto la suma es 18.

Ejercicio 7

Un cono se cortó con dos planos perpendiculares a su eje de manera que quedaron dos tapas circulares de radio 1 y 7 respectivamente a distancia 2 entre ellas. Calcular la superficie del cono sin contar las tapas.

Recordemos que la superficie de revolución de una función positiva $f(x)$ alrededor de un intervalo $[a, b]$ es $\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

Solución:

Se pide la superficie de revolución de $f(x) = 3x + 1$ alrededor de $[0, 2]$. Para esto se debe integrar $g(x) = 2\sqrt{10}\pi(3x + 1)$ en dicho intervalo lo cual da como resultado $16\sqrt{10}\pi$.

Ejercicio 8

Calcular la longitud de la parte de la curva de ecuación $y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}$ con x en $[0, 5]$.

Recordemos que la longitud de arco del gráfico de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ es $\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

Solución:

Integrando $g(x) = \sqrt{\frac{x}{4} + 1}$ en $[0, 5]$ se obtiene $\frac{19}{3}$.

Ejercicio 9

Una calle recta va en subida con inclinación de 30 grados durante 1 kilómetros y luego 45 grados durante 2 kilómetros. ¿Cuál es la diferencia de altura en kilómetros entre el punto inicial y final de la calle?

Solución:

La altura ganada al recorrer a kilómetros con inclinación α en radianes es $a \sin(\alpha)$. Conviertiendo los ángulos a radianes la altura ganada es $\frac{1}{2} + \sqrt{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$.

Ejercicio 10

Calcular $\int_0^\pi 2x \sin(2x) dx$.

Solución:

Aplicando partes derivando x se obtiene que $-x \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x)$ es una primitiva de $2x \sin(2x)$ y por lo tanto la integral vale $-\pi$.
