Respuestas Correctas

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5
6	1	2	6	2
Ej. 6	Ej. 7	Ej. 8	Ej. 9	Ej. 10
3	1	3	6	3

Ejercicio 1

Calcular el máximo de la función $f(x) = 3x\log\left(\frac{x}{2}\right)$ en el intervalo $[3,4]$.

Solución:

La derivada de $f(x) = 3x\log\left(\frac{x}{2}\right)$ es $f'(x) = 3\log\left(\frac{x}{2}\right) + 3$. Evaluando $f(x)$ en los extremos del intervalo y en las raices de f' que pertenecen al intervalo se obtiene que el máximo valor es $12\log(2)$.

Ejercicio 2

Calcular el área del triángulo encerrado en el cuadrante positivo por la tangente a la curva $y = 2e^{-2x}$ en el punto con $x = 1$.

Solución:

La ecuación de la recta tangente es $y = -\frac{1}{e^2}(4x-4) + \frac{2}{e^2}$. Substituyendo $x = 0$ e $y = 0$ y resolviendo la ecuación, obtenemos que la base y altura del triángulo son $\frac{3}{2}$ y $\frac{6}{e^2}$. Por lo tanto el área es $\frac{9}{2e^2}$.

Ejercicio 3

Calcular $p(1)$ donde p es el polinomio de Taylor en 0 de grado 3 de la función $f(x) = \sin(x)\cos(2x)$.

Solución:

Se obtiene $p(x) = -\frac{13x^3}{6} + x$ de donde $p(1) = -\frac{7}{6}$.

Ejercicio 4

Calcular el volumen de revolución alrededor del eje x de la función $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + 3$ sobre el intervalo $[0,1]$. Recordar la fórmula $\int_a^b \pi f(x)^2 dx$ para el volumen de revolución del gráfico de una función positiva sobre un intervalo.

Solución:

El volumen es $\int_0^1 \pi f(x)^2 dx = g(1) - g(0) = \frac{233\pi}{20}$, donde $g(x) = \pi\left(\frac{12x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{x^4}{4} + 9x\right)$.

Ejercicio 5

Calcular $f''(\pi/4)$ donde $f(x) = \int_0^{\sin(x)} e^{2y^2} dy$.

Solución:

Por el teorema fundamental $f'(x) = e^{2\sin^2(x)} \cos(x)$ de donde $f''(x) = 4e^{2\sin^2(x)} \sin(x) \cos^2(x) - e^{2\sin^2(x)} \sin(x)$ y $f''(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}e}{2}$.

Ejercicio 6

Calcular la suma superior correspondiente a la integral $\int_0^3 x^2 - 2x + 4 \; dx$ para la partición del intervalo en tres partes iguales.

Solución:

Los puntos de la partición son $\{0, 1, 2, 3\}$ el máximo valor en cada intervalo de la partición correspondiente es $4, 4, 7$. Por lo tanto la suma es 15.

Ejercicio 7

Un cono se cortó con dos planos perpendiculares a su eje de manera que quedaron dos tapas circulares de radio 1 y 7 respectivamente a distancia 1 entre ellas. Calcular la superficie del cono sin contar las tapas.

Recordemos que la superficie de revolución de una función positiva $f(x)$ alrededor de un intervalo $[a, b]$ es $\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

Solución:

Se pide la superficie de revolución de $f(x) = 6x + 1$ alrededor de $[0, 1]$. Para esto se debe integrar $g(x) = 2\sqrt{37}\pi (6x + 1)$ en dicho intervalo lo cual da como resultado $8\sqrt{37}\pi$.

Ejercicio 8

Calcular la longitud de la parte de la curva de ecuación $y = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$ con x en $[0,15]$.

Recordemos que la longitud de arco del gráfico de una función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ es $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx$

Solución:

Integrando $g(x) = \sqrt{x+1}$ en $[0,15]$ se obtiene 42.

Ejercicio 9

Una calle recta va en subida con inclinación de 45 grados durante 3 kilómetros y luego 60 grados durante 4 kilómetros. ¿Cuál es la diferencia de altura en kilómetros entre el punto inicial y final de la calle?

Solución:

La altura ganada al recorrer a kilómetros con inclincación α en radianes es $a\sin(\alpha)$. Convirtiendo los ángulos a radianes la altura ganada es $\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{3}$.

Ejercicio 10

Calcular $\int_0^\pi 2x\sin(x)dx$.

Solución:

Aplicando partes derivando x se obtiene que $-2x\cos(x) + 2\sin(x)$ es un primitiva de $2x\sin(x)$ y por lo tanto la integral vale 2π.
