
Ejercicio 1

Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \frac{ax^3+(1-a)x^2+x-2}{bx^3+(1-b)x^2+x-2}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 1} \frac{ax^3+(1-a)x^2+x-2}{bx^3+(1-b)x^2+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(ax^2+x+2\right)}{(x-1)\left(bx^2+x+2\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{ax^2+x+2}{bx^2+x+2} = \frac{a+3}{b+3}$$

Letra	Opción correcta
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{-x^3+2x^2+x-2}$	A
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{2x^3-x^2+x-2}$	B
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^3-x^2+x-2}{-x^3+2x^2+x-2}$	C
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^3-x^2+x-2}{x^3+x-2}$	D
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^3-2x^2+x-2}{-x^3+2x^2+x-2}$	E
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^3-2x^2+x-2}{2x^3-x^2+x-2}$	F

(**A**) 2

(**B**) $4/5$

(**C**) $5/2$

(**D**) $5/4$

(**E**) 3

(**F**) $6/5$

Ejercicio 2

Calcular el volumen de revolución obtenido al girar el gráfico de la función $f(x) = a + bx^2$ alrededor del eje x sobre el intervalo $[-1,1]$.

Solución: Recordar que $\mathbf{vol}(V_x) = \int_{-1}^{1} \pi\, (f(x))^2\, \mathrm{d}x$. En este caso:

$$\mathbf{vol}(V_x) = \pi \int_{-1}^{1} \left(a+bx^2\right)^2 \mathrm{d}x = 2\pi \left(a^2 + \frac{2ab}{3} + \frac{b^2}{5}\right)$$

Letra	Opción correcta
$f(x) = 1+x^2$	A
$f(x) = 1+2x^2$	B
$f(x) = 2+x^2$	C
$f(x) = 2+2x^2$	D
$f(x) = 3+x^2$	E
$f(x) = 3+2x^2$	F

(**A**) $56\pi/15$

(**B**) $94\pi/15$

(**C**) $166\pi/15$

(**D**) $224\pi/15$

(**E**) $112\pi/5$

(**F**) $138\pi/5$

Ejercicio 3

Calcular la suma superior de la función $f(x) = 1/x$ correspondiente a la partición en tres partes iguales del intervalo $[1,n]$.

Solución:

Sea $P = \{t_0, t_1, t_2, t_3\}$ con $t_0 = 1$, $t_1 = 1 + \frac{n-1}{3}$, $t_2 = 1 + 2\frac{n-1}{3}$ y $t_3 = n$. Como f es decreciente,

$$S^*(f,P) = (f(t_0) + f(t_1) + f(t_2))\frac{n-1}{3} = \left(1 + \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)\frac{n-1}{3} = \left(1 + \frac{3}{n+2} + \frac{3}{2n+1}\right)\frac{n-1}{3}$$

Letra	Opción correcta
$[1,2]$	A
$[1,4]$	B
$[1,7]$	C
$[1,10]$	D
$[1,13]$	E
$[1,16]$	F

(**A**) $47/60$

(**B**) $11/6$

(**C**) $46/15$

(**D**) $117/28$

(**E**) $236/45$

(**F**) $415/66$

Ejercicio 4

Calcular la coordenada x del punto de intersección entre la recta $y = 0$ y la recta tangente en $(a, a^3 - b)$ a la curva $y = x^3 - b$.

Solución:

La ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto de coordenadas $(a, f(a))$ es:

$$\begin{aligned} r: \quad y =& f(a) + f'(x)(x-a) \\ =& a^3 - b + 3a^2(x-a) \\ =& 3a^2x - (2a^3 + b) \end{aligned}$$

Si $A = 3a^2$ y $B = -(2a^3 + b)$, buscamos x_0 tal que $Ax_0 + B = 0$. Entonces tiene que ser:

$$x_0 = \frac{-B}{A} = \frac{2a^3 + b}{3a^2}.$$

Letra	Opción correcta
$(2,7)$ a la curva $y = x^3 - 1$	A
$(2,6)$ a la curva $y = x^3 - 2$	B
$(2,5)$ a la curva $y = x^3 - 3$	C
$(3,26)$ a la curva $y = x^3 - 1$	D
$(3,25)$ a la curva $y = x^3 - 2$	E
$(3,24)$ a la curva $y = x^3 - 3$	F

(**A**) $17/12$ (**B**) $3/2$ (**C**) $19/12$ (**D**) $55/27$ (**E**) $56/27$ (**F**) $19/9$

Ejercicio 5

Se caminan 12 kilómetros subiendo una pendiente de inclinación α y luego 4 bajando por una de inclinación β (ambos ángulos medidos desde la horizontal).

Calcular la altura en kilómetros que se ganó al final del recorrido.

Solución:

Si h_1 es la primer altura conseguida, entonces $h_1 = 12\sin(\alpha)$. Si h_2 es la altura que desciende luego, $h_2 = 4\sin(\beta)$. Entonces la altura final es:

$$h_f = h_1 - h_2 = 12\sin(\alpha) - 4\sin(\beta).$$

Letra	Opción correcta
15º y luego 4 bajando por una de inclinación 15º	A
15º y luego 4 bajando por una de inclinación 30º	B
15º y luego 4 bajando por una de inclinación 45º	C
30º y luego 4 bajando por una de inclinación 15º	D
30º y luego 4 bajando por una de inclinación 30º	E
30º y luego 4 bajando por una de inclinación 45º	F

(**A**) $2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$

(**B**) $3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} - 2$

(**C**) $3\sqrt{6} - 5\sqrt{2}$

(**D**) $6 - \sqrt{6} + \sqrt{2}$

(**E**) 4

(**F**) $6 - 2\sqrt{2}$

Ejercicio 6

Calcular el máximo de la función $f(x) = 2x^3 - 3(a+b)x^2 + 6abx - 6$ en el intervalo $[-2, 2]$.

Solución:

Como f es continua en el intervalo cerrado $[-2, 2]$, existe $M = \text{máx}\{f(-2), f(2), f(p) : p$ es punto crítico de f en
En este caso $f'(x) = 0$ solo si $x = a$ ó $x = b$. Entonces:

$$M = \text{máx}\{f(-2), f(2), f(c), f(d) \text{ si } -2 \leq c \leq 2 \text{ y } -2 \leq d \leq 2\}$$

Letra	Opción correcta
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x - 6$	A
$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x - 6$	B
$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 72x - 6$	C
$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x - 6$	D
$f(x) = 2x^3 - 6x - 6$	E
$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 24x - 6$	F

(**A**) 110

(**B**) 7

(**C**) 70

(**D**) 38

(**E**) -2

(**F**) 10

Ejercicio 7

Calcular $F'(c)$ donde $F(x) = \int_0^{bx} e^{t^2} t \sin(t) dt$.

Solución:

Por el teorema fundamental del cálculo,

$$F(x) = \int_0^{bx} e^{t^2} t \sin(t) \mathrm{d}t \Rightarrow F'(x) = e^{b^2x^2} bx \sin(bx) b \text{ y } F'(c) = b^2 c e^{b^2c^2} \sin(bc).$$

Letra	Opción correcta
$F'(1)$ donde $F(x) = \int_0^{3x} e^{t^2} t \sin(t) dt$	A
$F'(1)$ donde $F(x) = \int_0^{4x} e^{t^2} t \sin(t) dt$	B
$F'(1)$ donde $F(x) = \int_0^{5x} e^{t^2} t \sin(t) dt$	C
$F'(2)$ donde $F(x) = \int_0^{3x} e^{t^2} t \sin(t) dt$	D
$F'(2)$ donde $F(x) = \int_0^{4x} e^{t^2} t \sin(t) dt$	E
$F'(2)$ donde $F(x) = \int_0^{5x} e^{t^2} t \sin(t) dt$	F

(**A**) $9e^9 \sin(3)$

(**B**) $16e^{16} \sin(4)$

(**C**) $25e^{25} \sin(5)$

(**D**) $18e^{36} \sin(6)$

(**E**) $32e^{64} \sin(8)$

(**F**) $50e^{100} \sin(10)$

Ejercicio 8

Calcular c en $[0,4]$ tal que $f(c) = \frac{1}{4}\int_0^4 f(x)dx$ donde $f(x) = ax + |x-2|$.

Solución:

Discutiendo según si $x < 2$ o no obtenemos

$$f(x) = \begin{cases} (a-1)x+2 & \text{si } x \leq 2 \\ (a+1)x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Calculamos $f(0) = 2, f(2) = 2a, f(4) = 4a+2$ y observando que entre esos puntos el gráfico de f es una recta obtenemos sumando el área de dos trapecios que

$$\int_0^4 f(x)dx = 2\frac{2+2a}{2} + 2\frac{2a+4a+2}{2} = 8a+4.$$

Por lo tanto buscamos c para que $f(c) = 2a+1$.

Como en todos los casos $a \geq 2$ y f es creciente esto ocurre con $c > 2$ y obtenemos la ecuación $f(c) = (a+1)c-2 = 2a+1$ de donde $c = \frac{2a+3}{a+1}$.

Letra	Opción correcta
$f(x) = 2x + \|x-2\|$	A
$f(x) = 3x + \|x-2\|$	B
$f(x) = 4x + \|x-2\|$	C
$f(x) = 5x + \|x-2\|$	D
$f(x) = 6x + \|x-2\|$	E
$f(x) = 7x + \|x-2\|$	F

(**A**) $7/3$

(**B**) $9/4$

(**C**) $11/5$

(**D**) $13/6$

(**E**) $15/7$

(**F**) $17/8$
