Guía de solución del Práctico 8 (ejercicios de cálculo de diversas universidades del mundo)

September 27, 2019

1 Ejercicio 1

En general la recta tangente al gráfico de una función derivable f en el punto $(a, f(a))$ tiene ecuación

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

La curva $x^2y^2+y^3 = 2$ cerca de $(1,1))$ tiene la forma $x = \sqrt{2y^{-2} - y} = f(y)$. Por lo tanto la recta tangente en ese punto tiene ecuación:

$$x = f(1) + f'(1)(y - 1).$$

2 Ejercicio 2

Trazando un círculo centrado en la base del árbol y deradio 5 metros, la posición de la punta es un punto sobre el círculo a 3m de áltura y por lo tanto el ángulo del árbol con la horizontal es

$$\alpha = \arcsin(3/5).$$

La velocidad de la punta del árbol es 0.2 metros por segundo en dirección tangente al círculo (formando un ángulo $90^o - \alpha$ de la horizontal), y la velocidad de la sombra es la proyección sobre la dirección horizontal de esto. Se obtiene entonces

$$0.2\cos(90^o - \alpha) = 0.2\sin(\alpha) = 0.12,$$

metros por segundo.

3 Ejercicio 3

El área del rectángulo es $g(x) = 2x(1 - x^2)$ y el rectángulo existe sólo para x en $[-1, 1]$.

Se calculan los puntos críticos resolviendo $g'(x) = 0$ obteniendo $x = 1/\sqrt{3}$ como única solución.

Calculando $g(-1) = g(1) = 0$ y obtenemos que $g(1/\sqrt{3}) = 4/3\sqrt{3}$ es el máximo.

4 Ejercicio 4

El volumen de revolución de un gráfico $y = r(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ girado alrededor del eje x es

$$\int_a^b \pi r(x)^2 dx.$$

En este caso se pide girar $y = x^2$ alrededor del eje y en la parte correspondiente a y en $[0, 1]$. Vemos que en este intervalo la curva es $x = r(y) = \sqrt{y}$ y obtenemos que el volumen es

$$\int_0^1 \pi r(y)^2 dy.$$

5 Ejercicio 5

Llamando d a la longitud de la diagonal de la figura se obtienen dos ecuaciones para d

$$\frac{10}{\cos(x)} = d = \frac{5}{\tan(x)}.$$

Se obtien entonces

$$2\sin(x) = \cos(x)^2$$

de donde

$$\sin(x)^2 + 2\sin(x) - 1 = 0.$$

Se calcula $\sin(x)$ como la raiz positiva de la ecuación de grado 2 y luego aplicando arcsin se obtiene el valor de x.

6 Ejercicio 6

Fijando $y = e^x$ y observando que $y^2 = e^{2x}$ el ejercicio da una ecuación de grado dos para y. Cada raiz positiva a dicha ecuación da una solución x tomando logaritmo.

7 Ejercicio 7

La recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ tiene ecuación

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

La intersección de esta recta con el eje y es en $y = f(a) - af'(a) = 1 + a^2$.

La intersección con el eje x es en $x = a - f(a)/f'(a) = \frac{1+a^2}{2a}$.

Para que ambos puntos estén en el cuadrante positivo se requiere $a > 0$.

El área del triángulo a mínimizar es $g(a) = \frac{(1+a^2)^2}{4a}$. El mínimo existe porque cuando a se acerca a 0 o se hace muy grande $g(a)$ se hace grande.

Como no hay puntos de borde a considerar el mínimo se da en un punto que cumple $g'(a) = 0$. Se calculan dichos puntos y se compara el valor de g en ellos (si hay uno sólo debe ser donde se alcanza el mínimo).

8 Ejercicio 8

Argumentando geométricamente se verifica que el volumen máximo debe darse para un cílindro simétrico alrededor de un diámetro de la esfera.

Llamando x a la distancia entre una tapa del cilindro (x está en $[0, 3]$) se expresa el volúmen del cilindro como

$$g(x) = 2x\pi(9 - x^2).$$

Se calcula el máximo comparando $g(0) = g(1)$ con el valor de g en las soluciones a $g'(x) = 0$.

9 Ejercicio 9

Una forma de calcular el límite cuando $x \to 1$ es calcular el límite cuando $h \to 0$ de la expressión obtenida al reemplazar x por $1+h$. Haciendo esto el numerador y denominador pasan a ser divisibles entre h y luego de cancelar se obtiene un límite sencillo donde numerador y denominador tienen límites finitos y no nulos.

10 Ejercicio 10

Este ejercicio es similar al 7.

11 Ejercicio 11

Las curvas se cortan en puntos cuya coordenada x cumple

$$x^2 - 2x + 1 = 5 - x^2$$

o

$$2x^2 - 2x - 4 = 0.$$

Esto da $x = -1$ y $x = 2$.

Sobre este intervalo la curva $y = 5-x^2$ está por encima de la $y = x^2-2x+1 = (x-1)^2$.

El área se calcula entonces como

$$\int_{-1}^{2} (5 - x^2) - (x^2 - 2x + 1)dx.$$

12 Ejercicio 12

Calculando cubos de enteros observamos que $2 < \sqrt[3]{24} < 3$.

Consideramos la función $f(x) = x^3 - 24$ y notamos que $f(2) < 0$ y $f(3) > 0$.

Partiendo al medio el intervalo calculamos $f(5/2) = \frac{125}{8} - 24 = \frac{125-192}{8} < 0$.

Por lo tanto $\frac{5}{2} < \sqrt[3]{24} < 3$.

Este método de bisección se puede repetir para obtener la precisión requerida (existen otros métodos computacionalmente más eficientes, como por ejemplo el método de Newton).

Para ilustrar este método damos los intervalos que se obtienen en los primeros 10 pasos:

Paso	Intervalo
1	$[2, 3]$
2	$[5/2, 3]$
3	$[11/4, 3]$
4	$[23/8, 3]$
5	$[23/8, 47/16]$
6	$[23/8, 93/32]$
7	$[23/8, 185/64]$
8	$[369/128, 185/64]$
9	$[369/128, 739/256]$
10	$[369/128, 1477/512]$

El último intervalo permite ver que $2.882 < \sqrt[3]{24} < 2.885$.

13 Ejercicio 13

Llamamemos $x(t)$ a la distancia entre la lámpara y la persona luego de t segundos. Suponiendo que $x(0) = 0$ obtenemos $x(t) = 3t$.

Llamemos $s(t)$ a la longitud de la sombra de la persona luego de t segundos, por razonamiento trigonométrico obtenemos

$$\frac{x(t) + s(t)}{8} = \frac{s(t)}{6}$$

de donde
$$s(t) = 3x(t) = 9t.$$

Derivando se obtiene $s'(t) = 9$ pies por segundo.

14 Ejercicio 14

Para cada t entre -2 y 0 la recta $y = t$ corta el triángulo dado en dos puntos. Llamemos $r(t)$ a la distancia menor de estos dos puntos hasta $(2, t)$ y $R(t)$ a la mayor.

El volumen se calcula como

$$V = \int_{-2}^{0} \pi(R(t)^2 - r(t)^2)dt$$

Si V se expresa en litros entonces aproximadamente V litros de agua pesan V kilogramos. Subir una masa de m kilogramos una altura h requiere un trabajo de al menos mgh donde g es la aceleración gravitatoria (≈ 10 metros por segundo cada segundo). Esto permite dar una idea (muy aproximada) de la mínima energía requerida para llenar de agua el surco (por ejemplo con la intensión de estimar el consumo eléctrico de una bomba que se utilizará para esto).

15 Ejercicio 15

Se discute según si $x^2 - 2 > 0$ o no. En los puntos donde $x^2 - 2 > 0$ se tiene $f(x) = 2x + x^2 - 2$ que se puede derivar fácilmente. En los puntos donde $x^2 - 2 < 0$ se tiene $f(x) = 2x + 2 - x^2$.

Los puntos problemáticos son $\pm\sqrt{2}$ donde se debeŕa comparar los resultados que se obtienen por ambas fórmulas (si no coinciden entonces la función no es derivable en el punto en cuestión).

16 Ejercicio 16

Se iguala $f(3) = A$ con $3^2 - 3A$ y $f(5) = A$ con $5B - 5$.

17 Ejercicio 17

Si $f'(x) > 0$ en un intervalo entonces f es creciente en dicho intervalo. Si $f'(x) < 0$ en un intervalo entonces f es decreciente en dicho intervalo.

Si $f''(x) > 0$ en un intervalo entonces f es convexa (sonriente, un mnemónico es "con beso" que nos recuerda pensar en qué lado de la mano de una doncella besaría un caballero medieval en una película) en dicho intervalo. Si $f''(x) < 0$ en un intervalo entonces f es cóncava (¿sin beso?).

El ejercicio consiste entonces en estudiar el signo de f' y f'' e interpretar el resultado gráficamente.

18 Ejercicio 18

El área de la figura es $2rx+\pi r^2$ mientras que el perímetro es $2x+2\pi r$. Sabiendo que el área es 20 alcanza para expresar x en función de r.

19 Ejercicio 19

Supongamos que se está bombeando agua a b metros cúbicos por minuto. Entonces el volumen total de agua luego de t segundos es

$$V(t) = (b - 0.01)t + c.$$

Llamando $N(t)$ al nivel del agua en el instante t obtenemos (asumiendo que no desbordó aún y usando la fórmula para volumen de un cono)

$$V(t) = \frac{1}{3}N(t)\pi\left(\frac{1}{3}N(t)\right)^2 = \frac{1}{27}\pi N(t)^3.$$

Usando que $N(0) = 2$ obtenemos $V(0) = \frac{8}{27}\pi = c$.

Se depeja $N(t)$ de forma que la única incógnita es el valor de b. Con esto se iguala

$$N'(0) = 0.3$$

para obtener el valor de b que es lo que se pide.

20 Ejercicio 20

La base del ejercicio es conocer el triángulo equilatero de lado 1. Los ángulos internos son de 60^o, si se parte uno de estos ángulos al medio en dos de 30^o la altura que se obtiene mide $\sqrt{3}/2$ (Pitágoras) y divide al lado opuesto en dos mitades de longitud 1/2.

Se busca α entre 0 y π tal que

$$(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{1-\frac{3}{4}}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Como $\sin(30^o) = 1/2$ el ángulo buscado es $180^o - 30^o = 150^o$.

21 Ejercicio 21

Llamemos $r(t)$ a la distancia del punto $(1,t)$ del eje de revolución al punto de la curva $y^2 = 4x$ con $y = t$, y $R(t) = 2$ la distancia sobre la misma recta $y = t$ al eje y. El volumen es

$$\int_0^2 \pi(R(t)^2 - r(t)^2)dt.$$

22 Ejercicio 22

Representando la región en cuestión vemos que es “un cuadrante” contenido entre dos semi-rectas que se juntan en un punto cuyas coordenadas dependen de a.

Mirando los conjuntos de nivel de la función a máximizar $z = x + ay$ vemos que el valor mínimo en la región se da en el vértice.

Por lo tanto el ejercicio consiste en calcular $f(a) = ua + av$ donde (u, v) es el vértice de la región, y encontrar la solución a la ecuación $f(a) = 7$.

23 Ejercicio 23

Reescribiendo $f'(x) = x^{-1/2} + x^{1/2}$ se calcula inmediatamente (tabla de derivadas) que $f(x) = 2x^{1/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + c$. Luego el valor $f(1)$ permite determinar el valor de c.

24 Ejercicio 24

Similar al ejercicio 17.

25 Ejercicio 25

Similar al ejercicio 4.

26 Ejercicio 26

Se calcula directamente $\int_1^4 x^{-1/2}dx = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2$.

Como el intervalo de integración tiene largo 3, el ejercicio pide entonces calcular c tal que

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{2}{3}.$$

27 Ejercicio 27

La ecuación e la recta tangente es

$$y = g(0) + g'(0)x.$$

Por lo tanto el ejercicio consiste en calcular $g'(0)$. Para esto habrá que aplicar el teorema fundamental que nos dice que definiendo $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ se tiene $F'(0) = f(0)$.

28 Ejercicio 28

Otro ejercicio del teorema fundamental. Se busca que $H'(x) - G'(x) = 0$ para todo x.

La dificultad adicional es que el tercer término de H no es de la forma $\int_1^x f(t)dt$ sino $\int_1^{x^2} f(t)dt$ (i.e. lo anterior pero evaluado en x^2). Para derivar este término se usa la regla de la cadena.

29 Ejercicio 29

Similar al ejercicio 27 (con la dificultad adicional de usar la regla de la cadena como en el ejercicio 28).

30 Ejercicio 30

Similar a los anteriores.

31 Ejercicio 31

Similar a los anteriores.

32 Ejercicio 32

Derivando una vez se obtiene una ecuación calcula $f(x^2)$ y por lo tanto $f(x)$. Para hallar λ se utiliza que $\int_4^4 f(t)dt = 0$.