Práctico Semana 11

1. Función inversa

1. Sea $f : I \to J = \mathrm{Im}(f)$ estrictamente creciente. Probar que $g = f^{-1} : J \to I$ es estrictamente creciente.
2. Dar una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biyectiva y no monótona.
3. Determinar en cada caso intervalos maximales donde la función sea invertible.

   a) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = 2x+5$ *b*) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = |2x+5|$ *c*) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = -2x^3+3$

   d) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = 2x^2+3x-5$ *e*) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = |x^2+x-2|$

   f) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = \sin(x)$ *g*) $f : I \to \mathbb{R};\ \cos(x)$ *h*) $f : I \to \mathbb{R};\ \tan(x)$
4. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Dar condiciones a f para que la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ sea inyectiva.
5.
   a) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótonas crecientes. Probar que $f+g$, $f \circ g$, $\max\{f,g\}$. son monótonas crecientes.

   b) Verificar que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^{101} + x^5 + 7x^3 + 2x$ es biyectiva.
6. Verificar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   es continua y no es monótona en ningún intervalo de la forma $[0,a]$ con $a > 0$.
7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona y biyectiva. Probar que f es continua. Sugerencia: dado $a \in \mathbb{R}$, estudiar $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$.

2. Continuidad uniforme

1. Determinar en cada caso si f es uniformemente continua en I:

   a) $f(x) = \lfloor x \rfloor \quad I = [0,1]$ *b*) $f(x) = \lfloor x \rfloor \quad I = (0,1)$

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad I = [1,2]$ *d*) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad I = [1,+\infty)$ *e*) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad I = (0,2)$
2. Estudiar continuidad uniforme de las siguiente funciones

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = ax+b$ *b*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = |x|$

   c) $f : (-a,a) \to \mathbb{R};\ f(x) = x^2$ *d*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = x^2$

   e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = \sin(x)$ *f*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = \sin^2(x)$ *g*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = \sin(x^2)$

   h) $f : [-1,1] \to \mathbb{R};\ f(x) = \dfrac{x}{4-x^2}$ *i*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ *j*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

   k) $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R};\ f(x) = \sqrt{x}$ *l*) $f : (0,1) \to \mathbb{R};\ f(x) = \log(x)$ *m*) $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R};\ f(x) = \log(x)$

3. *a*) Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz. Probar que f es uniformemente continua. De un ejemplo de una función uniformemente continua y no Lipschitz.

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable y acotada. Probar que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ es uniformemente continua.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función periódica y continua. Probar que es uniformemente continua.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Probar que existen constantes a y b en $\mathbb{R}^+$ tales que

$$-(\lfloor |ax| \rfloor + b) \leq f(x) \leq \lfloor |ax| \rfloor + b$$

   Representar graficamente la situación.

   Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 1$$

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio. Probar que f es uniformemente continua si solo si $f(x) = ax + b$.

7. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas.

   a) Probar que $f + g$ es uniformemente continua.
   b) Discutir que ocurre para fg.
   c) Probar que $h_1 = f(ax + b)$ y $h_2 = af(x) + b$ son uniformemente continuas.
   d) Probar más en general que $f \circ g$ es uniformemente continua.
   e) Dar un ejemplo de funciones f, g tales que fg no sea uniformemente continua.

8. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua.

   a) Probar que existen los límites $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x)$, los llamaremos A y B respectivamente.

   b) Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in (a, b) \\ A & \text{si } x = a \\ B & \text{si } x = b \end{cases}$$

   A una función de estas caracteristicas se le llama extensión, es decir g es una extensión de f. Esta notación se debe a que la funciones g y f coinciden en el dominio de f.

   1) Probar que g es uniformemente continua.
   2) Deducir que g tiene extremos absolutos en $[a, b]$.

   c) Probar que la función f esta acotada

9. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que f es uniformenente continua si solo si existen y son finitos los límites

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \qquad\qquad \lim_{x \to b^-} f(x)$$

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, tal que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

   con $a, b \in \mathbb{R}$. Probar que f es uniformememnte continua.

11. Sean $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $c \in (a, b)$.

   a) Dar un ejemplo de f tal que sea continua en $(a, b) \setminus \{c\}$ pero no continua en c.

b) Probar que si f es uniformemente continua en $(a,b)\setminus\{c\}$, entonces es uniformemente continua en (a,b).

12. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funcion uniformemente continua. Probar que f es integrable.

13. Sea $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ una función continua y acotada. Probar que la función $g:(0,1)\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=x(x-1)f(x)$ es uniformemente continua.

14. Sean A, B intervalos. Sean $f:A\to\mathbb{R}$ y $g:B\to\mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas, tales que $f(x)=g(x)$ para todo $x\in A\cap B$. Definimos la función $h:A\cup B\to\mathbb{R}$ como

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in A\\ g(x) & \text{si } x\in B\end{cases}$$

Probar que si $A\cap B\neq\emptyset$ entonces h es uniformemente continua. Dar un ejemplo donde $A\cap B=\emptyset$ y h no sea uniformemente continua.

15. **Integreales**

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua.

a) Dados $a,b\in\mathbb{R}$, con $a<b$. Probar que si f es no negativa y $\int_a^b f(t)\,dt=0$ entonces la función f es 0.

b) (**Valor medio**) Segundo parcial, segundo semestre 2015, desarrollo.

1. Demostrar que existe $c\in[a,b]$ tal que $f(c)(b-a)=\int_a^b f(t)\,dt$
2. ¿El c de la parte anterior es único? Justificar su respuesta.
3. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ no es continua ¿vale la conlcusión de la primera pàrte? Justificar su respuesta

c) Sea $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. Probar que si $\max(F)=F(c)$ para algún $c\in(a,b)$ entonces $f(c)=0$

d) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada y continua en (a,b). Probar que f es integrabale en $[a,b]$.

16. Segundo parcial, primer semestre 2016, desarrollo partes b y c

Sea $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ continua tal que $f(x)>0$, $x\in[0,2]$ y $\int_0^2 f(t)\,dt=6$

b) Supongamos además que $g:[0,2]\to\mathbb{R}$ una función integrable y acotada con máximo M y mínimo m. Probar que

$$6m\leq\int_0^2 f(t)g(t)\,dt\leq 6M$$

C) Deducir que $6\leq\int_0^2(3t^2-1)e^t\,dt\leq 6e^2$

Parte adicional: Deducir que $6\leq\int_0^2(3t^2-1)e^{t^2}\,dt\leq 6e^4$

3. Cálculo de derivadas

En este practico se aceptarán como regla las siguiente derivadas

$$(e^x)'=e^x,\quad (\sin(x))'=\cos(x),\quad (\cos(x))'=-\sin(x)\quad (x^n)'=nx^{n-1}:\ \forall n\in\mathbb{N},\quad (\log(x))'(x)=\frac{1}{x}\tag{1}$$

así como las siguientes reglas

$$(f+g)'=f'+g',\quad (fg)'=f'g+fg',\quad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}\quad (f\circ g)'=(f'\circ g)(g')\tag{2}$$

1. Calcular la derivada de las siguientes funciones

$$a)\quad \frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3} \qquad b)\quad \frac{ax+b}{cx+d} \qquad c)\quad \frac{x^2+3x+2}{x^4+x^2+1} \qquad d)\quad x\sqrt{1+x^2} \qquad e)\quad \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f)\quad \sin^3(x) \qquad g)\quad \sin\left(x^3\right) \qquad h)\quad \sin(\cos(x)) \qquad i)\quad \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad j)\quad \sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)$$

$$k)\quad e^{x^2} \qquad l)\quad e^{\sin(x)} \qquad m)\quad e^{\frac{1}{x^2+1}} \qquad n)\quad \sin\left(e^x\right)+\cos\left(x^2+1\right)$$

2. Calcular las derivadas de las siguientes funciones

$$a)\quad x-\sin(x)\cos(x) \qquad b)\quad x\log(x)-x \qquad c)\quad \tan(x)$$

3. Si f y g son funciones derivables en todo su dominio, halle las siguientes derivadas en función de las derivadas de f y g:

$$a)\quad f(g(x)+x) \qquad b)\quad \frac{f(x)}{g^2(x)+1} \qquad c)\quad \sqrt{(f(x))^2+(g(x))^2} \qquad d)\quad (f(x))^{g(x)}$$

4. Opcionales

1. *a*) Probar que la función $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{x^2-2}$ es continua pero no se puede extender de forma continua a $\mathbb{R}$.

   b) Probar que si $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ es uniformementen continua, entonces se puede extender de forma uniformemente continua a $\mathbb{R}$

2. **Estructuras**

   Dados dos conjuntos A, B y con determinada estructura, una pregunta natural es si existe una función biyectiva que preserve la estructura, tal que su inversa también.

   En este caso estudiaremos continuidad.

   a) Dar una función $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ biyectiva y continua, y que además f^{-1} sea continua. Probar que no hay una función $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, biyectiva y uniformemente continua.

   b) Probar que hay una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$. Mostrar que no existe $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ tal que f sea biyectiva y uniformemente continua. Discutir sobre la existencia de $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ tal que f sea biyectiva y continua

Ejercicios mínimos obligatorios

- Día 1
  - Ejercicio 1.3, uno por fila
  - Ejercicio 1.4 o 1.6
  - Ejercicio 2.2, uno por fila. o un par de ejercicios de la recopilacion de MO.
- Día 2
  - Ejercicio 2.5
  - Ejercicio 2.10
  - Ejercicio 2.13
  - Ejercicio 2.15.c y 2.15.d
- Día 3
  1. Ejercicio 3.1 dos partes por fila
  2. Ejercicio 3.2
  3. Ejercicio 3.3, dos partes