Práctico Semana 10

1. Propiedades generales de las funciones continuas

1. Sean a,b,c y d numeros reales tales que $a < b$ y $c < d$. Bosquejar, si es posible, una función f continua que cumplan.

   a) $f : (a,b) \to [c,d]$, $f((a,b)) = (c,d)$
   b) $f : (a,b) \to [c,d]$, $f((a,b)) = [c,d]$
   c) $f : (a,b) \to [c,d]$, $f((a,b)) = (c,d]$
   d) $f : [a,b] \to [c,d]$, $f([a,b]) = (c,d)$
   e) $f : [a,b] \to [c,d]$, $f([a,b]) = [c,d]$
   f) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f((a,b)) = \mathbb{R}$
   g) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f([a,b]) = \mathbb{R}$
   h) $f : \mathbb{R} \to [c,d]$, $f(\mathbb{R}) = [c,d]$
   i) $f : \mathbb{R} \to [c,d]$, $f(\mathbb{R}) = (c,d)$

2. **Existencia de soluciones**

   a) Demuestre que la ecuación dada $x + 2\cos(x) = 0$ tiene al menos una solución.
   b) En los siguientes casos, hallar un entero n para el cual existe x tal que $n \leq x \leq n+1$ y $f(x) = 0$:

   $$a)\quad x^3 - x + 3 \qquad b)\quad x^5 + 5x^4 + 2x + 1 \qquad c)\quad x^5 + x + 1 \qquad d)\quad x + e^x$$

   c) Demostrar que existe un número x tal que:

   $$a)\quad \sin(x) = x - 1 \qquad b)\quad 5\sin(x) = \cos(x)^2$$

   $$c)\quad x^{117} + \frac{534}{1 + x^2 + \sin^2(x)} = 1212 \qquad d)\quad x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + \sin^2(x)} = 119$$

   $$e)\quad \sqrt{x-5} = \frac{1}{x+3}$$

   d) Examen, Julio 2015, parte del problema 3 Probar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo (1,2):

   $$x\left(\frac{x^2}{2} - 1\right) - 5 = \log(x) - e^x$$

   e) Considere la ecuación $1 - \frac{x^2}{4} = \cos(x)$.
   1) Muestre que tiene al menos una solución.
   2) Muestre que tiene al menos dos soluciones.
   3) Muestre que tiene al menos tres soluciones.

3. Dados a, b positivos probar que la ecuación

$$\frac{a}{x^3 - x^2 - 4x + 4} + \frac{b}{x^3 + x^2 - 4x - 4} = 0$$

tiene al menos una solución en el intervalo $(-1, 1)$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que existe un par $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f(a) < 0 < f(b)$. Sea A el conjunto definido por $A = \{y > a : f(z) < 0 : \forall z \in [a, y]\}$. Probar que A esta acotado, no tiene maximo y $\sup(A)$ es una raíz de f.

5. **Puntos fijos**

   Dada f una función, un punto fijo de f es un valor c tal que $f(c) = c$. Notar que una función puede tener varios puntos fijos, uno solo o ninguno.

   a) Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Probar que f tiene al menos un punto fijo.

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y monotona decreciente. Probar que f tiene al menos un punto fijo.

   c) De un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y sin puntos fijos.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar o dar un contraejemplo para las siguientes afirmaciones

   a) La función f esta acotada si solo si tiene máximo y mínimo.

   b) Si f tiene máximo y mínimo entonces esta acotada.

   c) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, entonces f esta acotada.

   d) Si f esta acotada entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

   e) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, entonces f tiene máximo y mínimo.

   f) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, entonces f tiene máximo o mínimo.

   g) Si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, entonces f tiene máximo y mínimo.

   h) Si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, entonces f tiene máximo o mínimo.

   i) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ entonces f tiene mínimo.

7. **Polinomios**

   a) Todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz.

   b) Mostrar que la paridad de la cantidad de raíces contadas con multiplicidad es igual a la paridad del grado del polinomio.

   c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio. Probar que existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $|f(y)| \leq |f(x)| : \forall x \in \mathbb{R}$.

   d) Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

   $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\phi(x)}{x^n} = 0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\phi(x)}{x^n}$$

   1) Probar que si n es impar, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^n + \phi(x) = 0$.

   2) Probar que si n es par existe un numero y tal que $y^n + \phi(y) \leq x^n + \phi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

   e) Dado un polinomio P decimos que una raíz ha sido separada si se ha encontrado un intervalo $[a, b]$ que contiene esta raíz y ninguna otra. Separar las raíces reales de cada uno de los siguientes polinomios (todos tienen 4 raices).

   Comentarios: Estudiar $P\left(\frac{n}{2}\right)$ para $n \in \mathbb{Z}$

   a) $3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8$ *b*) $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$ *c*) $x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2$

8. **Extremos absolutos**

   a) Primer parcial, primer semestre 2010. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

   $$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ a^2x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   El valor de a que hace que f sea continua y no tenga tenga extremos absolutos es ...

   b) Primer parcial, primer semestre 2007.
   Sean las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \ \text{ y } \ \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

   Indicar la opción correcta.

   (A) f alcanza un máximo y g alcanza un mínimo.
   (B) f^2 alcanza un máximo y g alcanza un mínimo.
   (C) f esta acotada pero no alcanza ni mínimo ni máximo y g alcanza un mínimo.
   (D) f alcanza un mínimo y $-g$ esta acotada superiormente.
   (E) f^2 alcanza un mínimo y g^2 no esta acotada.

9. Determine existencia de maximo y minimo de las siguientes funciones $\mathbb{R}$. En caso de que existan, calcularlos.

   a) $f(x) = x^2 + 2$ *b*) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ *c*) $f(x) = x^4 + x^2 - 4$

   d) $f(x) = \sin^2(x)$ *e*) $f(x) = |x^9 - 2x^7 + x - 3|$

   f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ *g*) $f(x) = \dfrac{x^5 + x^3 + 2}{x^2+1}$ *h*) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

10. Para cada una de las siguientes funciones decida cúales están acotadas superior o inferiormente en el intervalo que se indica, y cuáles alcanzan su valor máximo o mínimo.

    a) $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$ *b*) $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$ *c*) $f(x) = x^2$ en $[0, +\infty)$

    d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq a \\ a+2 & \text{si } x > a \end{cases}$ en $(-a-1, a+1)$ con $a > -1$

    e) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ donde } \frac{p}{q} \text{ fraccion irreducible} \end{cases}$ en $[0, 1]$ *f*) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ en $[0, a]$

11. Primer parcial, primer semestre 2007, MO

    Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se concideran los siguientes enunciados:

    Enunciado I: Si f es continua en todo punto $x \in \mathbb{R}$, entonces la imagen por f de cualquier intervalo cerrado y acotado es tambien un intervalo cerrado y acotado.

    Enunciado II: Si la imagen por f de cualquier intervalo cerrado y acotado es un intervalo cerrado y acotado entonces f es una función continua para todo $x \in \mathbb{R}$.

    (A) Ambos enunciados son verdaderos.
    (B) El Enunciado II es verdadero pero, el Enunciado I es falso, y un contraejemplo es la función f tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
    (C) El Enunciado I es verdadero pero, el Enunciado II es falso, y un contraejemplo es la función f tal que $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

(D) El Enunciado I es verdadero pero, el Enunciado II es falso, y un contraejemplo es la función f tal que $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

(E) Ambos resultados falsos.

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $x \leq f(x) \leq x + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $f(\mathbb{R})$.

13.

    a) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que f es continua y $f(x)$ es racional para todo x. ¿Qué puede decirse acerca de f?

    b) Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una funcion continua, tal que $x^2+(f(x))^2 = 1$. Demuestre que o bien $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ o bien $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$

    c) ¿ Cuántas funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hay que satisfagan $(f(x))^2 = x^2$

2. Función exponencial

1. Mostrar que existe un valor $e \in \mathbb{R}$ tal que $\log(e) = 1$.

   A partir de las propiedades de log vistas en el práctico 6, probar que $\log(e^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Probar que la función $\exp(x) = e^x$ es la inversa de log.

2. *a*) Sean $g : I \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monotona en un entorno de $a \in I$. Dada $f : J \to \mathbb{R}$ probar que $\lim_{x \to g(a)} f(x)$ existe, si solo si $\lim_{x \to a} f(g(x))$ existe y ademas se cumple que

   $$\lim_{x \to g(a)} f(x) = \lim_{x \to a} f(g(x))$$

   b) A paritr de las parte anteriores, tomando $g(x) = \log(x)$ calcular los siguientes límites

   $$a) \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

   Calcular los siguientes límites

   $$b) \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x} \qquad c) \quad \lim_{x \to 1} \frac{e^{x^2-1} - 1}{x-1} \qquad d) \quad \lim_{x \to -1} \frac{e^{x^3+1} - 1}{3x+3}$$

   $$e) \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos(x)}{x} \qquad f) \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(x)} - \cos(x)}{x} \qquad g) \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin^2(x)} - \cos(x)}{x^2}$$

   $$h) \quad \lim_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}} \qquad i) \quad \lim_{x \to +\infty} e^{\log^2(x+1)} - e^{\log^2(x)}$$

3. Probar que

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

   Deducir que

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$$

   Calcular

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

3. Aplicaciones

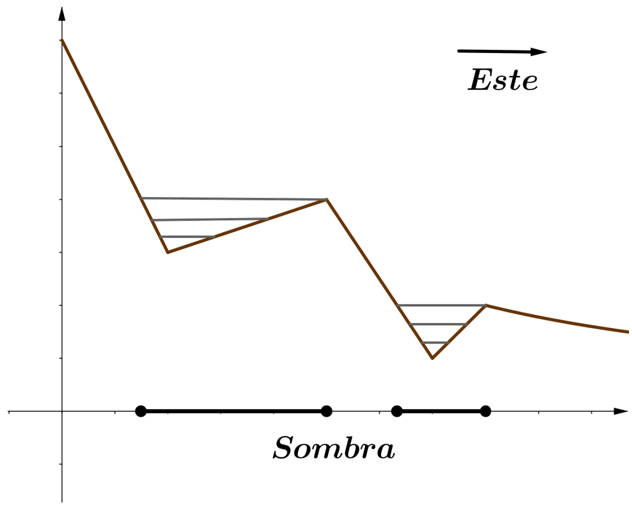
1. Sea F la función que le asgina a cada punto del planeta tierra su temperatura, asumamos que la tierra tiene forma esférica perfecta, y que la función F es continua.

   Discutir si la siguiente afirmación es verdadera: Existen dos puntos antipodales (diametralmente opuestos en la esfera) que tienen la misma temperatura.

2. Lema del Sol Naciente

   Suponga que tenemos una región montañosa como en la figura. Denominamos $f(x)$ a la altura de cada punto y donde la coordenada x crece hacia el este. Asuma que f es continua.

   En el momento del Alba, podemos suponer que los rayos de sol son horizontales, habra lugares con sombra y lugares sin sombra. Llamamos $S = \{x : \text{ en el punto } (x, f(x)) \text{ hay sombra}\}$

   a) Discutir que $x \in S$ si solo si $\exists y > x$ tal que $f(x) < f(y)$. Esta es la definición formal de S.

   b) Suponga que $(a,b) \subset S$ y $a \notin S$, $b \notin S$, en particular $f(a) \geq f(b)$.

      1) Suponga que $f(a) > f(b)$, demuestre que el máximo de f en $[a,b]$ es $f(a)$.

      2) Demuestre que esto lleva a una contradiccion por tanto $f(a) = f(b)$

   c) Sea p tal que existe un intervalo I para el cual $p \in I$ que cumple la siguiente propiedad, $\forall x \in I \ \ x \in S$ si solo si $x < p$. Mostrar que $f(p)$ es un pico, es decir un máximo relativo.

3. Un reloj averiado marca inicialmente un tiempo t_0. El reloj puede adelantar o atrasar, pero cuenta con exactitud periodos de 12 horas, es decir, pasadas 12 horas el reloj marca un tiempo $t_0 + 12$ horas. Demuestre que en algún momento dicho reloj mide con exactitud una hora.

4. Suponga que tiene un resorte colgando desde el techo, y lo estira hacia abajo. ¿Es cierto que algún punto del resorte quedara en su posición original? Suponga que tiene un resorte sobre una superficie latreral (digamos una mesa) y lo contrae desde los extremos, aplicando fuerza similar, pero sin saber si es igual o no ¿Es cierto que algún punto del resorte quedará en su posición original?

4. Opcionales

1. **Distancia a una curva**

   a) Suponga que f es continua en $[a,b]$, y sea x cualquier número. Demuestre que existe un punto en la gráfica de f que es el que está más al punto $(x,0)$, en otras palabras, existe un y de $[a,b]$ tal que la distancia de $(x,0)$ a $(y,f(y))$ es menor igual que la distancia $(z,f(z))$ para todo z de $[a,b]$. Recordar que la distancia entre dos puntos del plano $P=(p_1,p_2)$ y $Q=(q_q,q_2)$ es $d(P,Q)=\sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}$.

   b) Muestre que este resultado no es cierto si $[a,b]$ se sustituye por (a,b).

   c) Demuestre que el resultado es cierto si $[a,b]$ se sustituye por $\mathbb{R}$.

2. Demuestre que no existe una función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que la preimagen de cada punto tenga 2 valores, es decir $\#f^{-1}(y)=2$ para todo $y\in\mathbb{R}$.

Ejercicios mínimos obligatorios

- Día 1
  - Ejercicio 1.1
  - Ejercicio 1.2.a y dos partes de 1.2.b y 1.2.c
  - Ejercicio 1.3
  - Ejercicio 1.5
- Día 2
  - Ejercicio 1.6 tres partes
  - Ejercicio 1.9 uno por fila
  - Ejercicio 1.10 uno por fila
  - Ejercicio 1.7 menos parte e.
- Día 3
  1. Ejercicio 2.2.a 2.2.b.a y 3 partes más del 2.2.b
  2. Ejercicio 2.3
  3. Ejercicio 3.2 o 3.3