Práctico Semana 09

1. Cálculo de límite

1. Determinar existencia de los siguientes límites, y en caso de existencia calcularlos.

$a)$ $\lim_{x\to 2} \frac{x}{x^2+1}$ $\quad b)$ $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x-1}{x^3+2}$ $\quad c)$ $\lim_{x\to 1} \frac{\sum_{k=0}^{n} x^k}{x^2+1}$ $\quad d)$ $\lim_{x\to 2} \frac{(x+2)^{10}}{(x-6)^{10}}$

$e)$ $\lim_{x\to 0} \frac{x^5-x^3+5x^2}{x^7-x^4+x^2}$ $\quad f)$ $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3}$ $\quad g)$ $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2-4}{(x+2)^2}$ $\quad h)$ $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-2x^2+x}$

$i)$ $\lim_{x\to 1} \frac{|(x-1)^2|}{(x-1)^2}$ $\quad j)$ $\lim_{x\to 2} \frac{|x^4-6x^3+12x^2-8x|}{x^5-5x^4+6x^2+4x-8}$ $\quad k)$ $\lim_{x\to 0} \frac{|x|^2-|x|}{|x^2-x|}$

2. **Polinomios**
Sean $P,Q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos polinomios, definidos por $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ y $Q(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ con $a_n \neq 0 \neq b_m$
Probar que:

a)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \text{ si solo si } n<m$$

b)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m} \text{ si solo si } n=m$$

c)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \text{signo}(a_n b_m)\infty \text{ si solo si } n>m$$

3. Determinar existencia de los siguientes límites, y en caso de existencia calcularlos.

$a)$ $\lim_{x\to+\infty} 2x+3-(2(x+5)+3)$ $\quad b)$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{(2(x+5)+3)}$ $\quad c)$ $\lim_{x\to+\infty} (x-1)^2-x^2$ $\quad d)$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2}{x^2}$

$e)$ $\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+x-1}$ $\quad f)$ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ $\quad g)$ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^4-x^3+1}-\sqrt{x^4+15x^2-5}$

$h)$ $\lim_{x\to+\infty} \sin(x+1)-\sin(x)$ $\quad i)$ $\lim_{x\to+\infty} \log(x+1)-\log(x)$ $\quad j)$ $\lim_{x\to+\infty} e^{x+1}-e^{x}$

$k)$ $\lim_{x\to+\infty} \log(2x)-\log(x)$ $\quad l)$ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x}-\sqrt{x}$ $\quad m)$ $\lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x+1}}-e^{\sqrt{x}}$ $\quad n)$ $\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\sqrt{x+1}\right)-\sin\left(\sqrt{x}\right)$

4. Determinar existencia de los siguientes límites, y en caso de existencia calcularlos.

$a)$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-10x-1}{10x^2+10x+1}$ $\quad b)$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ $\quad c)$ $\lim_{x\to+\infty} x\cos(x)$ $\quad d)$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\sin^2(x)}{x^2+x+1}$

$e)$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$ $\quad f)$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{2x^6+x^5+1}}$ $\quad g)$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}}$

$h)$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x}$ $\quad i)$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^n}$ $\quad j)$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+e^x}}{x^3+2x+2}$

5. Determinar existencia de los siguientes límites, y en caso de existencia calcularlos.

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \lfloor x+1\rfloor - \lfloor x\rfloor$ *b*) $\lim\limits_{x\to+\infty} \lfloor x+1/2\rfloor - \lfloor x\rfloor$ *c*) $\lim\limits_{x\to+\infty} \lfloor 2x\rfloor - \lfloor x\rfloor$ *d*) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\lfloor 2x\rfloor}{2} - \lfloor x\rfloor$

6. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(t)=\lfloor t\rfloor$
   Determinar existencia de los siguientes límites, y en caso de existencia calcularlos.

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt$ *b*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-x}^x f(t)\,dt$ *c*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x t-f(t)\,dt$

   d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}$ *e*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^3}$ *f*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^2}$

   g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt - \frac{x(x-1)}{2}$

7. Asumiendo que existe y es finito, calcular para los siguientes casos $\lim_{x\to a} f(x)$

   a) $\lim\limits_{x\to0} f(2x+1)=1,\ a=1$ *b*) $\lim\limits_{x\to1} f(2x-2)+f(x-1)=4,\ a=0$

   c) $\lim\limits_{x\to1} f(x^2-1)^2+3f(x-1)=1,\ a=0$ *d*) $\lim\limits_{x\to1} f(\log(x))=1,\ a=0$

   e) $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x^2)-1}{x}=1,\ a=4$ *f*) $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x^3)-3f(x)}{x^3-3x}=1,\ a=1$ *g*) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2-1)}{x^2-1}=1,\ a=0$

8. Sabiendo que la función $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1$, calcular:

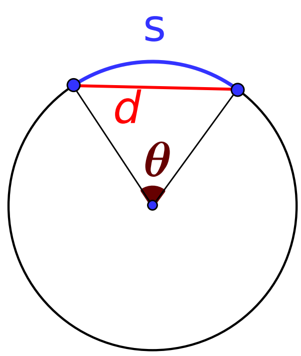
   a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(5x)}{\sin(x)}$ *b*) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x^2)}{x}$ *c*) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-x-2}$ *d*) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$

   e) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$ *f*) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *g*) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}$ *h*) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(\sin(x))}$

9. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función monótona.

   a) Probar que si f esta acotada entonces existe el límite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y es finito.
   b) Probar que si f monótona creciente y no esta acotada superiormente entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$
   c) Dar un ejemplo de una función acotada tal que no exista el límite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

10. En la siguiente figura se muestra un arco circular de longitud s y una cuerda de longitud d, ambos sostenidos por un ángulo central θ. Detemine $\lim_{\theta\to0^+}\frac{s}{d}$



11. Decimos que una función tienen como asíntota a la recta r cuando x tiende a infinito si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - r(x) = 0$$

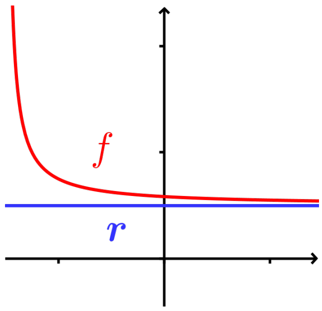


Figura 1: Ejemplo gráfico de una asíntota

Determinar si las siguientes funciones tienen asíntota en $+\infty$ y en caso de tener calcularlas.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ c) $f(x) = \dfrac{3x+3}{2x-4}$

d) $f(x) = \arctan(x)$ e) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ f) $f(x) = \dfrac{\cos(x)+\sin(x)}{x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}$ h) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ i) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

Ejercicios mínimos obligatorios

- Día 1
  - Ejercicio 1.1, uno por fila
  - Ejercicio 1.3, uno por fila
  - Ejercicio 1.4 uno por fila
  - Ejercicio 1.5 dos partes
- Día 2
  - Ejercicio 1.2
  - Ejercicio 1.8, dos por fila y 1.10
  - Ejercicio 1.11 uno por fila
  - Ejercicio 1.6, uno de la fila 1 y uno de la fila 2