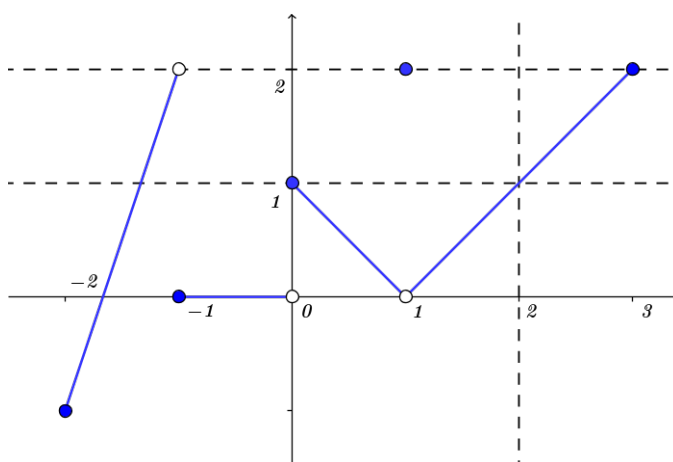


Práctico Semana 07

1. Definición y propiedades básicas de límite

1. Determine los límites que se piden para la función $g(x)$ cuya gráfica se muestra a continuación o explique por qué no existen

a) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$



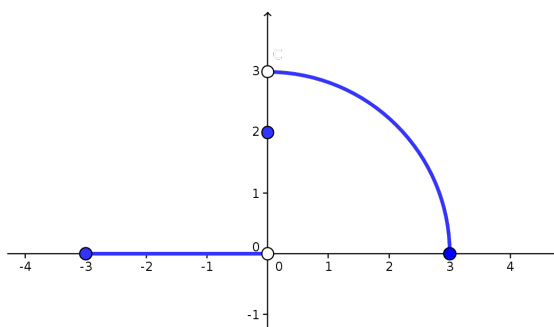
Calcular

e) $g(-2)$ f) $g(-1)$ g) $g(0)$ h) $g(1)$ i) $g(2)$ j) $g(3)$

¿Puede calcular los valores k) $g(-1,1)$ l) $g(0,5)$ m) $g(1,2)$ n) $g(2,5)$?

2. A partir de la función cuya gráfica se muestra aquí explique por qué

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 2$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 3$



3. Encontrar $L \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo x que cumple $0 < |x - a| < \delta$, para los valores $\epsilon = 10^{-2}, 10^{-5}, 10^{-10}$.

a) $f(x) = x^2, a \in \mathbb{R}$ b) $f(x) = x^2 - 2x, a = 0$ c) $f(x) = x^2 + 5x - 2, a = 2$

d) $f(x) = \sqrt{x}, a = 1$ e) $f(x) = \sqrt{|x|}, a = 0$ f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, a = 0$

g) $f(x) = \frac{1}{x}, a = 1$ h) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}, a = 1$ i) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, a = 0$

j) $f(x) = x(3 - \cos(x^2)), a = 0$ k) $f(x) = \frac{x}{2 - \sin^2(x)}, a = 0$ l) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right), a = 0$

4. Se estudian las siguientes variaciones de la definición de límite.

Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}$, el límite de f cuando x tiende a p es L si:

a) (Definición de límite)

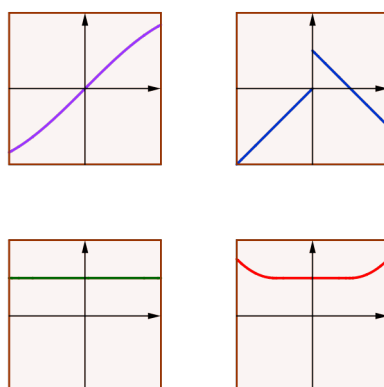
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$: tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$

b) $\exists \epsilon > 0, \exists \delta > 0$: tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$

c) $\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0$: tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$

d) $\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0$: tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$

Determinar las implicancias entre ellas. Determinar para los gráficos de la imagen cuales verifican que variante de definición cumplen tomando $p = 0$.



5. Primer parcial, segundo semestre 2012, MO

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ para todo $x \neq 1$ y $f(1) = 0$. Sea $B^*(1, \delta) = \{x : 0 < |x - 1| < \delta\}$. Se realizan las siguientes afirmaciones:

(I) Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existen $x_1, x_2 \in B^*(1, \delta)$ con $|f(x_1) - f(x_2)| > \epsilon$.

(II) Dado $\epsilon > 0$ cualquiera existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B^*(1, \delta)$ entonces $|f(x) - 1| < \epsilon$.

(III) Cualquiera sea $\epsilon > 0$, no es posible hallar $\delta > 0$ tal que si $|x - x'| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x')| < \epsilon$

(IV) Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Entonces:

(A) Solamente la afirmacion (I) es verdadera.

(B) Solamente la afirmacion (II) es verdadera.

(C) Solamente las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.

(D) Solamente la afirmación (IV) es verdadera.

(E) Solamente las afirmaciones (IV) y (II) son verdaderas.

6. Sean $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones donde I es un intervalo abierto y $p \in I$ tal que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a$ y $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = b$.

a) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que $\lim_{x \rightarrow p} \lambda + f(x) = \lambda + a$.

b) Examen mayo 2017, Problema 1, parte 1.a

Probar que la función $h(x) = f(x) + g(x)$ tiene límite en p y $\lim_{x \rightarrow p} h(x) = a + b$.

c) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la función $\tilde{f}(x) = \lambda f(x)$ verifica que $\lim_{x \rightarrow p} \tilde{f}(x) = \lambda a$.

d) Probar que la función $h(x) = f(x)g(x)$ verifica que $\lim_{x \rightarrow p} h(x) = ab$.

e) Probar que si $b \neq 0$ entonces la función $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ cumple que $\lim_{x \rightarrow p} h(x) = \frac{a}{b}$.

f) Supongamos que $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Sea $h(x)$ una función real, probar que existe el $\lim_{x \rightarrow p} \frac{h(x)}{g(x)}$ si y solo si existe el límite $\lim_{x \rightarrow p} \frac{h(x)}{f(x)}$, más aun $\lim_{x \rightarrow p} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{h(x)}{f(x)}$.

g) Sea $h(x)$ una función acotada y suponga que $a = 0$, probar que la función $r(x) = f(x)h(x)$ cumple que $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = 0$.

h) Suponga que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I$. Probar que $a \leq b$. Dar un ejemplo de funciones $f(x) < g(x) \forall x \neq p$ y con $a = b$.

i) Suponga que $a = b$ y que $\forall x \in I$ $f(x) \leq g(x)$. Probar que si $h(x)$ verifica $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ entonces $\lim_{x \rightarrow p} h(x) = a$.

j) Suponga que $a = p$ y sea $h(x) = g(f(x))$ probar o dar un contraejemplo de la afirmación: Existe el límite de h en p y $\lim_{x \rightarrow p} h(x) = b$.

7. Afirmaciones incorrectas

Explique mediante un ejemplo por que la siguiente afirmación sobre límites son falsa.

El número L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0 si $f(x)$ se acerca más a L a medida que x se aproxima a x_0

8. Asumiendo que existe, calcular para los siguientes ejemplos $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x)}{5} = 1, a = 3 \quad b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1, a = -2 \quad c) \lim_{x \rightarrow 2} f(x)^2 - 6f(x) + 2 = -7, a = 2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0, a = 0 \quad e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 3, a = 2$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2f(x) - 1}}{f(x)} = 1, a = 0 \quad g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2f(x) - x}}{f(x)} = 1, a = 1$$

2. Cálculo de límites y continuidad

1. Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{llll}
 a) \lim_{x \rightarrow 1} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 & b) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-1} + 1 & c) \lim_{x \rightarrow 1} \log(x) & d) \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) + \cos(x) \\
 e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 4} & f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} & g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2x^3}{x^3 - x^2} & h) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} & i) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3} \\
 j) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}} & k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} & l) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & n) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-x}{x-1}
 \end{array}$$

2. Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll}
 a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} & b) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1} & c) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4 - \sqrt{3x+1}}{x^2 - 7x + 10} \\
 d) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} & e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \\
 f) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & g) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)^2}{x} & h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}
 \end{array}$$

3. Determinar en qué puntos son continuas las siguientes funciones:

- $f(x) = \lfloor x \rfloor$
- $f(x) = \lfloor 1/x \rfloor$.
- $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.
- $f(x)$ = el primer número del desarrollo decimal de x .
- $f(x)$ = el número de sietes del desarrollo decimal de x si este número es finito y cero en el caso contrario.
- Examen mayo 2017, Problema 1, parte 2.b Determinar en qué puntos son continuas las funciones f , g y $f + g$, donde $f, g : (0, 4) \rightarrow \mathbb{R}$ están definidas por $f(x) = |x - 2|$ y $g(x) = \lfloor x \rfloor$.

4. Determinar para que $a, b \in \mathbb{R}$ la función f es continua

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} & b) f(x) = \begin{cases} \log(x+1) & \text{si } x > 0 \\ (x+a)^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \\
 c) f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases} & d) f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ a \sin(x + b) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}
 \end{array}$$

e) Primer parcial, segundo semestre 2014, MO

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos(x) & \text{si } x \leq \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

5. Determinar la existencia y calcular $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ en los siguientes casos

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

6. Primer parcial, primer semestre 2011, Problema 7 parte d.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Probar que f no es continua en 0.

7. Probar que una función Lipschitz es continua. Deducir que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\int_0^x f(t) dt$ donde f es integrable es continua.

8. a) Examen mayo 2017, Problema 1, parte 1.b

Probar que si f es continua en el punto a y g no es continua en el punto a , entonces $f + g$ no es continua en el punto a .

b) Primer parcial, primer semestre 2014, MO

Para toda pareja de funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) Si f es discontinua en c y g es continua en c , entonces $f + g$ es discontinua en c

(II) Si f es discontinua en c y g es continua en c , entonces fg es continua en c

(III) Si f es discontinua en c y g es discontinua en $f(c)$, entonces $g \circ f$ es discontinua en c

Indicar la opción correcta:

(A) Solo las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.

(B) Ninguna de las afirmaciones es verdadera

(C) Solo la afirmación (I) es verdadera

(D) Solo las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.

(E) Solo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.

9. Primer parcial, primer semestre 2010, ejercicio 7 partes a) y b)

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n-1}, \text{ para } n \geq 2 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Bosquejar el gráfico de f y deducir que $0 < f(x) < x, \forall x \in (0, 1]$.

b) Probar que f es continua en $x = 0$

10. Primer parcial, primer semestre 2012, ejercicio 2.a y 2.b

a) Si f es una función que satisface $|f(x)| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, demostrar que f es continua en cero.

b) Si g es una función continua en 0, $g(0) = 0$ y $|f(x)| \leq |g(x)|$, demostrar que f es continua en cero.

11. Primer parcial, 2005, VF

Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas que cumplen $f(r) = g(r), \forall r \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$

12. Calcular las indeterminaciones de logaritmo

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x-1} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \log(x) : a \geq 1$$

Determinar ahora la siguiente indeterminación de la inversa de la función log

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x}$$

13. Funciones monótonas

Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona creciente y $a \in \mathbb{R}$.

- Probar que dado $d > 0$ el conjunto $C_d = \{f(x) : 0 < x - a \leq d\}$ esta acotado.
- Verificar que si $d_1 < d_2$ entonces $C_{d_1} \subset C_{d_2}$, en particular $\inf(C_{d_1}) \geq \inf(C_{d_2})$ y $\sup(C_{d_1}) \leq \sup(C_{d_2})$
- Probar que $\sup(C_{d_i}) = f(a + d_i)$ y $\inf(C_{d_1}) = \inf(C_{d_2}) \geq f(a)$.
- Verificar que dado $\epsilon > 0$ existen $y_\epsilon \in C_d$ y $x_\epsilon > a$ tal que $y_\epsilon - \inf(C_d) = |y_\epsilon - \inf(C_d)| \leq \epsilon$ y $f(x_\epsilon) = y_\epsilon$.
Sea $\delta = x_\epsilon - a > 0$, probar que para todo $x \in C_\delta$ se tiene que $f(x) - \inf(C_x) = |f(x) - \inf(C_x)| \leq \epsilon$.
- Deducir que existe el límite $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. Mostrar de forma análoga que existe el límite $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.
- Dar un ejemplo de una función monótona tal que no existe el límite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

14. Polinomios

Sean $P, Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos polinomios, definidos por $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ y $Q(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ con $a_n \neq 0 \neq b_m$. Probar que:

Suponga que $a \in \mathbb{R}$ es raíz de P y Q . Se tiene así que $P(x) = P_1(x)(x - a)^{n_1}$ y $Q(x) = Q_1(x)(x - a)^{m_1}$, donde $P_1(a) \neq 0 \neq Q_1(a)$, por lo tanto la multiplicidad de a como raíz de P y Q es n_1 y m_1 respectivamente. Probar que:

a)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \text{ si sólo si } n_1 > m_1$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(a)}{Q_1(a)} \text{ si sólo si } n_1 = m_1$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty \text{ o } -\infty \text{ si sólo si } n_1 < m_1$$

15. Sean C_1 el círculo de ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ y C_2 el círculo de centro $(0, 0)$ y radio r . Notamos P el punto $(0, r)$ (punto superior de C_2) y Q el punto superior de la intersección entre C_1 y C_2 . Finalmente definimos R el punto de intersección de la recta PQ y el eje x . Notar que el punto R es una función del radio de C_2 , es decir r .

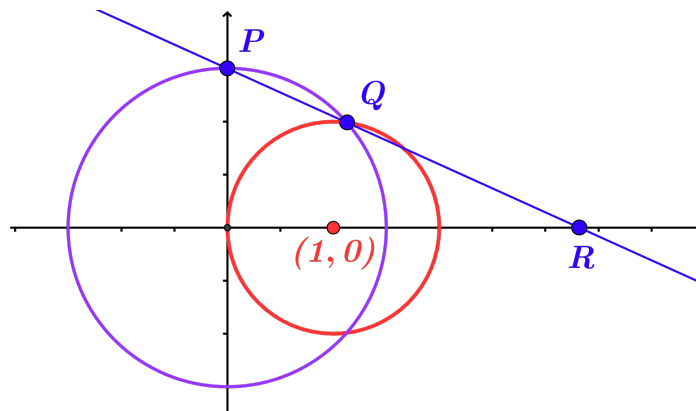


Figura 1: representación geométrica del problema

¿Qué ocurre con R cuando $r \rightarrow 0^+$?

3. Aplicaciones

1. Sea $N(P)$ la cantidad de calculadoras que puede vender una compañía manufacturera a un precio P .

Determinar el máximo dominio posible para la función P

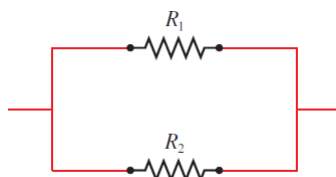
Si la función $N(p) = \frac{500}{p^2}$, calcular el $\lim_{p \rightarrow 0^+} N(P)$. Interpretar este resultado.

2. Circuitos eléctricos

- a) La ley de Ohm para circuitos electricos como el que se muestra en la figura siguiente, establece que $V = RI$. En la ecuación, V es una constante de voltaje, en volts, I es la corriente, en amperes, y R es la resistencia, en ohms. A la empresa en donde trabaja le han pedido que sustituya las resistencias por un circuito en donde V sea de 120 voltios, e I sea de $5 \pm 0,1$ amperes; En que intervalo deben contrarse R para que I esté a menos de 0,1 amperes del valor $I_0 = 5$?



- b) Si dos resistencias eléctricas con resistencias R_1 y R_2 respectivamente, se conectan en paralelo, entonces la resistencia total R esta dada por $R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$.



Suponga que se fija la resistencia R_2 con $R_2 = 10$ ohms, calcule la función $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ donde $f(x) =$ la resistencia de tomar $R_1 = x$ ohms.

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interprete estos resultados.

3. Relatividad

- a) Contracción de Lorentz

En la teoría de relatividad, la fórmula de de la contracción de Lorentz

$$L = L_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

expresa la longitud L de un cuerpo como función de su velocidad v con respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del cuerpo en reposo y c es la velocidad de la luz.

- 1) Calcule $\lim_{v \rightarrow 0} L(v)$
 - 2) Encuentre $\lim_{v \rightarrow c^-} L(v)$ e interprete el resultado. ¿Por qué es necesario un límite izquierdo?
- b) En la teoría de relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

donde m_0 donde m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la velocidad de la luz. ¿Qué ocurre cuando $v \rightarrow c^-$?

4. La fuerza de gravedad ejercida por la Tierra sobre una masa unitaria a una distancia r del centro del planeta es

$$F(x) = \begin{cases} \frac{GMr}{R^3} & \text{si } r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

donde M es la masa de la Tierra, R su radio y G es la constante gravitacional. ¿ F es una función continua de r ?

Ejercicios mínimos obligatorios

- Día 1
 - Ejercicio 1.1
 - Ejercicio 1.3 uno por fila, para alguno de los valores de ϵ del ejercicio.
 - Ejercicio 1.7 (discutir con sus compañeros)
 - Ejercicio 1.8 una parte por fila
- Día 2
 - Ejercicio 2.1 2 por fila
 - Ejercicio 2.3 dos partes
 - Ejercicio 2.2 uno por fila
 - Ejercicio 2.10
- Día 3
 1. Ejercicio 2.4 dos partes
 2. Ejercicio 2.12
 3. Ejercicio 2.14
 4. Ejercicio 3.2 o 3.3