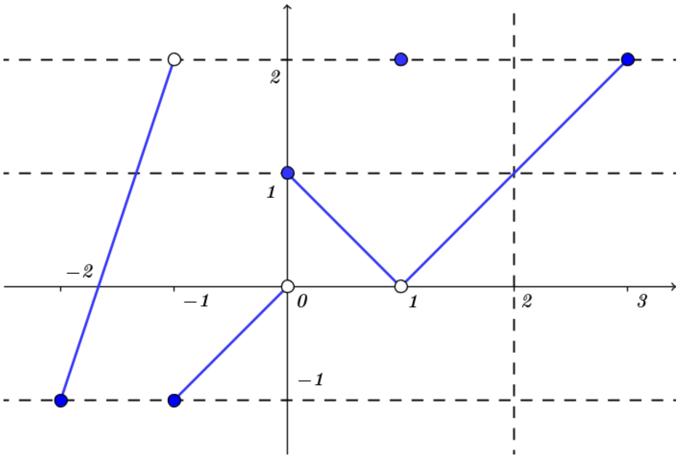
Práctico Semana 07

1. Definición y propiedades básicas de límite

1. Determine los límites que se piden para la función $g(x)$ cuya gráfica se muestra a continuación o explique por qué no existen

   a) $\lim_{x\to -1} g(x)$ *b*) $\lim_{x\to 0} g(x)$ *c*) $\lim_{x\to 1} g(x)$ *d*) $\lim_{x\to 2} g(x)$



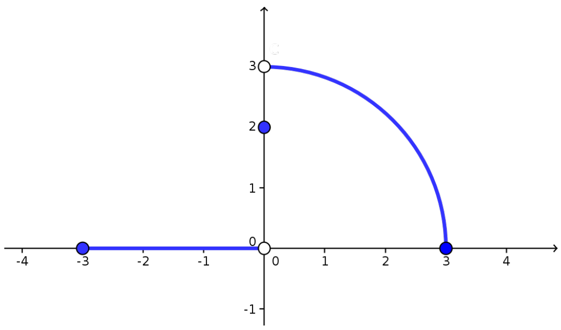
   Calcular

   e) $g(-2)$ *f*) $g(-1)$ *g*) $g(0)$ *h*) $g(1)$ *i*) $g(2)$ *j*) $g(3)$

   ¿Puede calcular los valores *k*) $g(-1{,}1)$ *l*) $g(0{,}5)$ *m*) $g(1{,}2)$ *n*) $g(2{,}5)$?

2. A partir de la función cuya gráfica se muestra aquí explique por qué

   a) $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$ *b*) $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 2$ *c*) $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 3$



3. Encontrar $L \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo x que cumple $0 < |x - a| < \delta$, para los valores $\epsilon = 10^{-2}, 10^{-5}, 10^{-10}$.

$a)$ $f(x) = x^2$, $a \in \mathbb{R}$ $\quad$ $b)$ $f(x) = x^2 - 2x$, $a = 0$ $\quad$ $c)$ $f(x) = x^2 + 5x - 2$, $a = 2$

$d)$ $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$ $\quad$ $e)$ $f(x) = \sqrt{|x|}$, $a = 0$ $\quad$ $f)$ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $a = 0$

$g)$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$ $\quad$ $h)$ $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$, $a = 1$ $\quad$ $i)$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $a = 0$

$j)$ $f(x) = x\left(3 - \cos\left(x^2\right)\right)$, $a = 0$ $\quad$ $k)$ $f(x) = \dfrac{x}{2 - \sin^2(x)}$, $a = 0$ $\quad$ $l)$ $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $a = 0$

4. Se estudian las siguientes variaciones de la definición de límite.

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}$, el límite de f cuando x tiende a p es L si:

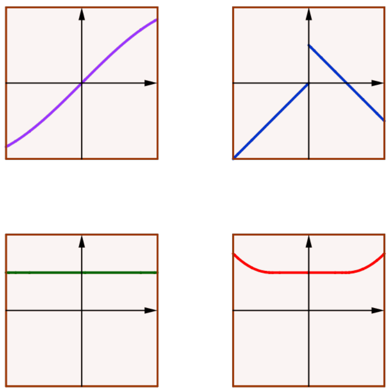
$a)$ (Definición de límite)
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$: tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$

$b)$ $\exists \epsilon > 0, \exists \delta > 0$: tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$

$c)$ $\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0$: tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$

$d)$ $\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0$: tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$

Determinar las implicancias entre ellas. Determinar para los gráficos de la imagen cuales verifican que variante de definición cumplen tomando $p = 0$.



5. Primer parcial, segundo semestre 2012, MO

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ para todo $x \neq 1$ y $f(1) = 0$. Sea $B^*(1, \delta) = \{x : 0 < |x - 1| < \delta\}$. Se realizan las siguientes afirmaciones:

(I) Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existen $x_1, x_2 \in B^*(1, \delta)$ con $|f(x_1) - f(x_2)| > \epsilon$.

(II) Dado $\epsilon > 0$ cualquiera existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B^*(1, \delta)$ entonces $|f(x) - 1| < \epsilon$.

(III) Cualquiera sea $\epsilon > 0$, no es posible hallar $\delta > 0$ tal que si $|x - x'| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x')| < \epsilon$

(IV) Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Entonces:

(A) Solamente la afirmacion (I) es verdadera.

(B) Solamente la afirmacion (II) es verdadera.

(C) Solamente las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.

(D) Solamente la afirmacion (IV) es verdadera.

(E) Solamente las afirmaciones (IV) y (II) son verdaderas.

6. Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones donde I es un intervalo abierto y $p \in I$ tal que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x\to p} g(x) = b$.

   a) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la $\lim\limits_{x\to p} \lambda + f(x) = \lambda + a$.

   b) Examen mayo 2017, Problema 1, parte 1.a
   Probar que la función $h(x) = f(x) + g(x)$ tiene límite en p y $\lim\limits_{x\to p} h(x) = a + b$.

   c) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la función $\tilde{f}(x) = \lambda f(x)$ verifica que $\lim\limits_{x\to p} \tilde{f}(x) = \lambda a$.

   d) Probar que la función $h(x) = f(x)g(x)$ verifica que $\lim\limits_{x\to p} h(x) = ab$.

   e) Probar que si $b \neq 0$ entonces la función $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ cumple que $\lim\limits_{x\to p} h(x) = \dfrac{a}{b}$.

   f) Supongamos que $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Sea $h(x)$ una función real, probar que existe el $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{h(x)}{g(x)}$ si solo si existe el límite $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{h(x)}{f(x)}$, más aun $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{h(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to p} \dfrac{h(x)}{f(x)}$.

   g) Sea $h(x)$ una función acotada y suponga que $a = 0$, probar que la función $r(x) = f(x)h(x)$ cumple que $\lim\limits_{x\to a} r(x) = 0$.

   h) Suponga que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I$. Probar que $a \leq b$. Dar un ejemplo de funciones $f(x) < g(x)$ $\forall x \neq p$ y con $a = b$.

   i) Suponga que $a = b$ y que $\forall x \in I \quad f(x) \leq g(x)$. Probar que si $h(x)$ verifica $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ entonces $\lim\limits_{x\to p} h(x) = a$.

   j) Suponga que $a = p$ y sea $h(x) = g(f(x))$ probar o dar un contraejemplo de la afirmación: Existe el límite de h en p y $\lim\limits_{x\to p} h(x) = b$.

7. **Afirmaciones incorrectas**
   Explique mediante ejemplos por que las siguientes afirmaciones sobre límites son falsas.

   a) El número L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0 si dado

   b) El número L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0 si $f(x)$ se acerca más a L a medida que x se aproxima a x_0

8. Calcular para los siguientes ejemplos $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

   a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 3,\ a = 2$ *b*) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1,\ a = -2$ *c*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0,\ a = 0$

   d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x^2)-1}{x} = 1,\ a = 4$ *e*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x^3)-3f(x)}{x^3-3x} = 1, a = 1$ *f*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x^2-1)}{x^2-1} = 1,\ a = 0$

   g) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)^2 + f(x) + 1 = 7,\ a = 2$ *h*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2f(x)-1}}{f(x)} = 1,\ a = 0$ *i*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2f(x)-x}}{f(x)} = 1,\ a = 1$

2. Cálculo de límites y continuidad

1. Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to 1} x^4+x^3+x^2+x+1$ *b*) $\lim_{x\to 2} \sqrt{x-1}+1$ *c*) $\lim_{x\to 1} \log(x)$ *d*) $\lim_{x\to 0} \sin(x)+\cos(x)$

   e) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x+2}{x^2+4}$ *f*) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ *g*) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4-2x^3}{x^3-x^2}$ *h*) $\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$ *i*) $\lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$

   j) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$ *k*) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x}$ *l*) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ *m*) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ *n*) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-x}{x-1}$

2. Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ *b*) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1}$ *c*) $\lim_{x\to 5} \frac{4-\sqrt{3x+1}}{x^2-7x+10}$

   d) $\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$ *e*) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\lceil \frac{1}{x} \rceil}$

   f) $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *g*) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)^2}{x}$ *h*) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$

3. Determinar en qué puntos son continuas las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$
   b) $f(x) = \lfloor 1/x \rfloor$.
   c) $f(x) = \sqrt{x-\lfloor x \rfloor}$.
   d) $f(x)$ = el primer número del desarrollo decimal de x.
   e) $f(x)$ = el número de sietes del desarrollo decimal de x si este número es finito y cero en el caso contrario.
   f) Examen mayo 2017, Problema 1, parte 2.b Determinar en que puntos son continuas las funciones f, g y $f+g$, donde $f,g:(0,4)\to\mathbb{R}$ estan definidas por $f(x)=|x-2|$ y $g(x)=\lfloor x \rfloor$.

4. Determinar para que $a,b\in\mathbb{R}$ la función f es continua

   a) $f(x) = \begin{cases} x^2+3x+2 & \text{si } x\le 1 \\ ax^2+bx+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ *b*) $f(x) = \begin{cases} \log(x+1) & \text{si } x>0 \\ (x+a)^2 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x<1 \\ ax+b & \text{si } 1\le x\ge 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$ *d*) $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ a\sin(x+b) & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

   e) Primer parcial, segundo semestre 2014, MO

   $$f(x) = \begin{cases} 2\cos(x) & \text{si } x\le\pi \\ ax^2+b & \text{si } x>\pi \end{cases}$$

5. Determinar la existencia y calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$ en los siguientes casos

   a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es raccional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$ *b*) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

6. Primer parcial, primer semestre 2011, Problema 7 parte d.

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   Probar que f no es continua en 0.

7. Probar que una función Lipschitz es continua. Deducir que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\int_0^x f(t)\,dt$ donde f es integrable es continua.

8. *a*) Examen mayo 2017, Problema 1, parte 1.b

   Probar que si f es continua en el punto a y g no es continua en el punto a, entonces $f + g$ no es continua en el punto a.

   b) Primer parcial, primer semestre 2014, MO

   Para toda pareja de funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se consideran las siguientes afirmaciones:

   (I) Si f es discontinua en c y g es continua en c, entonces $f + g$ es discontinua en c

   (II) Si f es discontinua en c y g es continua en c, entonces fg es continua en c

   (III) Si f es discontinua en c y g es discontinua en $f(c)$, entonces $g \circ f$ es discontinua en c

   Indicar la opción correcta:

   (A) Solo las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.

   (B) Ninguna de las afirmaciones es verdadera

   (C) Solo la afirmación (I) es verdadera

   (D) Solo las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.

   (E) Solo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.

9. Primer parcial, primer semestre 2010, ejercicio 7 partes a) y b)

   Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n-1}, \text{ para } n \geq 2 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   a) Bosquejar el gráfico de f y deducir que $0 < f(x) < x$, $\forall x \in (0,1]$.

   b) Probar que f es continua en $x = 0$

10. Primer parcial, primer semestre 2012, ejercicio 2.a y 2.b

    a) Si f es una función que satisface $|f(x)| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, demostrar que f es continua en cero.

    b) Si g es una función continua en 0 y $|f(x)| \leq |g(x)|$, demostrar que f es continua en cero.

11. Primer parcial, 2005, VF

    Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas que cumplen $f(r) = g(r)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

12. Calcular las indeterminaciones de logaritmo

    $$a) \quad \lim_{x \to 1} \frac{\log(x)}{x-1} \qquad b) \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(x)}{x^a} : a \geq 1$$

    Determinar ahora la siguiente indeterminación de la inversa de la función log

    $$c) \quad \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x}$$

13. **Funciones monótonas**

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monotona creciente y $a \in \mathbb{R}$.

a) Probar que dado $d > 0$ el conjunto $C_d = \{f(x) : 0 < x - a \leq d\}$ esta acotado.

b) Verificar que si $d_1 < d_2$ entonces $C_{d_1} \subset C_{d_2}$, en particular $\text{ínf}(C_{d_1}) \geq \text{ínf}(C_{d_2})$ y $\sup(C_{d_1}) \leq \sup(C_{d_2})$

c) Probar que $\sup(C_{d_i}) = f(a + d_i)$ y $\text{ínf}(C_{d_1}) = \text{ínf}(C_{d_2}) \geq f(a)$.

d) Verificar que dado $\epsilon > 0$ existen $y_\epsilon \in C_d$ y $x_\epsilon > a$ tal que $y_\epsilon - \text{ínf}(C_d) = |y_\epsilon - \text{ínf}(C_d)| \leq \epsilon$ y $f(x_\epsilon) = y_\epsilon$. Sea $\delta = x_\epsilon - a > 0$, probar que para todo $x \in C_\delta$ se tiene que $f(x) - \text{ínf}(C_x) = |f(x) - \text{ínf}(C_x)| \leq \epsilon$.

e) Deducir que existe el límite $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$. Mostrar de forma análoga que existe el limite $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

f) Dar un ejemplo de una función monótona tal que no existe el límite $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

14. **Polinomios**

Sean $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos polinomios, definidos por $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ y $Q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ con $a_n \neq 0 \neq b_m$ Probar que:

Suponga que $a \in \mathbb{R}$ es raíz de P y Q. Se tiene así que $P(x) = P_1(x)(x-a)^{n_1}$ y $Q(x) = Q_1(x)(x-a)^{m_1}$, donde $P_1(a) \neq 0 \neq Q_1(a)$, por lo tanto la multiplicidad de a como raíz de P y Q es n_1 y m_1 respectivamente. Probar que:

a)
$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \ \text{ si sólo si } \ n_1 > m_1$$

b)
$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(a)}{Q_1(a)} \ \text{ si sólo si } \ n_1 = m_1$$

c)
$$\lim_{x \to a^+} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty \text{ o } -\infty \ \text{ si sólo si } \ n_1 < m_1$$

15. Sean C_1 el círculo de ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y C_2 el círculo de centro $(0,0)$ y radio r. Notamos P el punto $(0, r)$ (punto superior de C_2) y Q el punto superior de la intersección entre C_1 y C_2. Finalmente definimos R el punto de intersección de la recta PQ y el eje x. Notar que el punto R es una función del radio de C_2, es decir r.

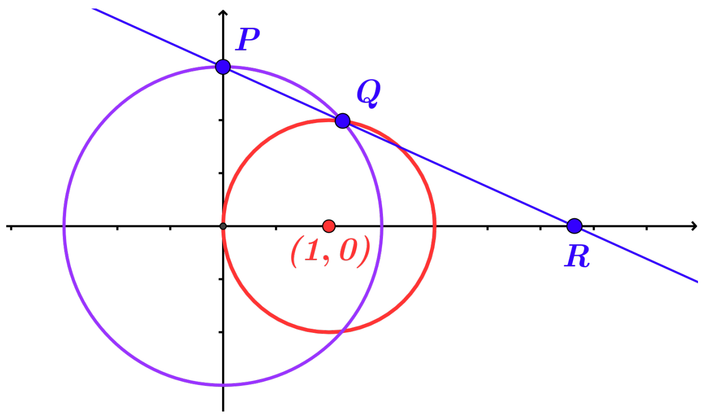


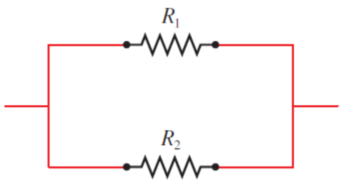
Figura 1: representación geométrica del problema

¿Qué ocurre con R cuando $r \to 0^+$?

3. Aplicaciones

1. Sea $N(P)$ la cantidad de calculadoras que puede vender una compañía manufacturera a un precio P. Determinar el máximo dominio posible para la función P
   Si la función $N(p) = \frac{500}{P^2}$, calcular el $\lim_{p \to 0^+} N(P)$. Interpretar este resultado.
2. **Circuitos eléctricos**
   a) La ley de Ohm para circuitos electricos como el que se muestra en la figura siguiente, establece que $V = RI$. En la ecuación, V es una constante de voltaje, en volts, I es la corriente, en amperes, y R es la resistencia, en ohms. A la empresa en donde trabaja le han pedido que sustituya las resistencias por un circuito en donde V sea de 120 voltios, e I sea de $5 \pm 0{,}1$ amperes¿En que intervalo deben contrarse R para que I esté a menos de 0,1 amperes del valor $I_0 = 5$?

   b) Si dos resistencias eléctricas con resistencias R_1 y R_2 respectivamente, se conectan en paralelo, entonces la resistencia total R esta dada por $R = \dfrac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$.



   Suponga que se fija la resistencia R_2 con $R_2 = 10$ ohms, calcule la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ donde $f(x) =$ la resistencia de tomar $R_1 = x$ ohms.
   Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interprete estos resultados.
3. Relatividad
   a) Contracción de Lorentz
   En la teoría de relatividad, la fórmula de de la contracción de Lorentz

$$L = L_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

   expresa la longitud L de un cuerpo como función de su velocidad v con respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del cuerpo en reposo y c es la velocidad de la luz.
   1) Calcule $\lim_{v \to 0} L(v)$
   2) Encuentre $\lim_{v \to c^-} L(v)$ e interprete el resultado. ¿Por qué es necesario un límite izquierdo?

   b) En la teoría de relatividad, la masa de una particula con velocidad v es

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

   donde m_0 donde m_0 es la masa de la particula en reposo y c es la velocidad de la luz. ¿Qué ocurre cuando $v \to c^-$?

Ejercicios mínimos obligatorios

- Día 1
  - Ejercicio 1.1
  - Ejercicio 1.3 uno por fila, para alguno de los valores de ϵ del ejercicio.
  - Ejercicio 1.7 (discutir con sus compañeros)
  - Ejercicio 1.8 una parte por fila
- Día 2
  - Ejercicio 2.1 2 por fila
  - Ejercicio 2.3 dos partes
  - Ejercicio 2.2 uno por fila
  - Ejercicio 2.10
- Día 3
  1. Ejercicio 2.4 dos partes
  2. Ejercicio 2.12
  3. Ejercicio 2.14
  4. Ejercicio 3.2 o 3.3