Práctico Semana 06

1. Cambio de variable lineal

1. Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función integrable y $a,b\in\mathbb{R}$ tal que $a<b$. Probar que:

   a) Para todo $p\in\mathbb{R}$ se cumple que
   $$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a+p}^{b+p} f(t-p)\,dt$$

   b) Para todo $r\in\mathbb{R}^+$ se cumple que
   $$r\int_a^b f(t)\,dt = \int_{ar}^{br} f\left(\frac{p}{r}\right)dt$$

   c) Deducir que para todo $p\in\mathbb{R}$ y $r\in\mathbb{R}^+$ se cumple que
   $$r\int_a^b f(t)\,dt = \int_{ra+p}^{rb+p} f\left(\frac{t-p}{r}\right)dt \qquad \text{y} \qquad r\int_a^b f(t)\,dt = \int_{r(a+p)}^{r(b+p)} f\left(\frac{t}{r}-p\right)dt$$

   d) Probar que
   $$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(b+a-t)$$

   De la igualdad anterior verificar que $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ para todo par $n,m\in\mathbb{N}$. Calcular en función del valor $\int_0^1 x^k\,dx$ la integral $\int_0^1 x^2(1-x)^{30}\,dx$.

2. Calcular la integral $\int_0^b x^n\,dx$ en función de b y $\int_0^1 x^n\,dx$.

   Deducir la fórmula general $\int_a^b x^n\,dx$ en función de a,b y $\int_0^1 x^n\,dx$.

3. **Definición y propiedades de la función logaritmo**
   Definimos la función logaritmo como
   $$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

   a) Probar que la función $\log:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ es creciente. Concluir que su única raíz es 1

   b) Probar la desigualdad $\log(n(a-1)+1)\le n\log(a)$ para todo $n\in\mathbb{N}$, $\forall a\ge 1$.

   c) Probar que $\log(a)=\int_x^{ax}\frac{1}{t}\,dt,\ \ \forall a,x\in\mathbb{R}^+$.
   Probar que
   $$\log(xy)=\log(x)+\log(y)$$

   d) A partir de la igualdad anterior probar que:

      1) $\log\left(x^2\right)=2\log(x)$
      2) $\log(x)=2\log\left(\sqrt{x}\right)$
      3) $\log\left(\frac{1}{x}\right)=-\log(x)$

4) Mas en general probar por inducción que:

$$\log(x^n) = n\log(x) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

5) Completar la prueba para el caso racional, es decir:

$$\log\left(x^{\frac{n}{m}}\right) = \frac{n}{m}\log(x) \text{ para todo } n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$$

e) A partir de la igualdad $\log(x^n) = n\log(x)$ deducir que la función log no esta acotada

4. **Círculos y elípses**

a) A partir de un cambio de variable lineal calcular el área de un círculo de radio r en función del área de un círculo de radio 1.

b) A partir de un cambio de variable lineal calcular el área de la elípse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en función del área de un círculo de radio 1.

5. Sabiendo que $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ es una función integrable, demostrar que:

a) Si f es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

b) Si f es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

2. Cálculo de integrales

1. Sea $f : [2, 8] \to \mathbb{R}$ integrable tal que $\int_2^8 f(x)\,dx = 20$ y $\int_8^4 f(x)\,dx = 12$.

a) Calcular $\int_2^4 f(x)\,dx$

b) Probar que existen $c, d \in [2, 4]$ tal que $f(c) \geq 15$ y $f(d) \leq 17$.

2. Suponga que f y g son dos funciones integrables y que

$$\int_1^2 f(x)\,dx = -4, \qquad \int_1^5 f(x)\,dx = 6, \qquad \int_1^5 g(x)\,dx = 8$$

Calcular:

$$a)\ \int_2^2 g(x)\,dx \qquad b)\ \int_5^1 g(x)\,dx \qquad c)\ \int_1^2 3f(x)\,dx$$

$$d)\ \int_2^5 f(x)\,dx \qquad e)\ \int_1^5 (f(x) - g(x))\,dx \qquad f)\ \int_1^5 (4f(x) - g(x))\,dx$$

3.

a) Calcular las siguientes integrales

$$a)\ \int_0^{2\pi} \sin(kt) + 5\,dt,\ k \in \mathbb{N} \qquad b)\ \int_0^{2\pi} \cos(kt) + 5\,dt,\ k \in \mathbb{N} \qquad c)\ \int_{-1}^{1} \tan(x)\,dx$$

b) Determinar el signo de las siguientes integrales

$$a)\ \int_0^2 \sin\left(x^2\pi\right)dx \qquad b)\ \int_{-1}^{1} \cos\left(x^2\pi\right)dx$$

4. Calcular las siguientes integrales

$$a)\ \int_0^{4,5} \lfloor x \rfloor\, dx \qquad b)\ \int_{-1}^{10} x - \lfloor x \rfloor\, dx \qquad c)\ \int_1^4 \lceil x \rceil\, dx \qquad d)\ \int_1^{10} x - \frac{\lfloor 2x \rfloor}{2}\, dx$$

$$e)\ \int_{-2}^{2} |x|\, dx \qquad f)\ \int_{-2}^{2} \lfloor x \rfloor\, dx \qquad g)\ \int_{-2}^{2} \lfloor |x| \rfloor\, dx \qquad h)\ \int_{-2}^{2} |\lfloor x \rfloor|\, dx$$

5. Calcular las siguientes integrales

$$a)\ \int_1^5 \lfloor x \rfloor^2\, dx \qquad b)\ \int_2^3 \left\lfloor x^2 \right\rfloor dx \qquad c)\ \int_1^2 \left\lfloor x^2 + x \right\rfloor dx \qquad d)\ \int_1^9 \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor dx \qquad e)\ \int_1^4 \sqrt{\lfloor x \rfloor}\, dx$$

$$f)\ \int_1^{100} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor dx \qquad g)\ \int_1^5 \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\, dx \qquad h)\ \int_1^5 \frac{1}{\lfloor x \rfloor^2}\, dx \qquad i)\ \int_1^5 \frac{2}{\lfloor 2x \rfloor^2}\, dx \qquad j)\ \int_1^5 \frac{4}{\lfloor 4x \rfloor^2}\, dx$$

$$k)\ \int_0^4 \sin(\pi \lfloor x \rfloor)\, dx \qquad l)\ \int_0^6 \sin\left(\frac{\pi \lfloor x \rfloor}{6}\right) dx \qquad m)\ \int_0^4 2^{\lfloor x \rfloor}\, dx$$

6. Calcular las siguientes integrales de los polinomios:

$$a)\ \int_{-3}^{3} x\, dx \qquad b)\ \int_{-4}^{4} \frac{x^3}{4}\, dx \qquad c)\ \int_{-100}^{100} \frac{20x^{51}}{31}\, dx$$

$$d)\ \int_0^2 x^2 + x \qquad e)\ \int_{-1}^{3} x^2 - x + 1\, dx \qquad f)\ \int_{-1}^{2} 3x^2 - 2x + 1\, dx$$

$$g)\ \int_0^2 x(x+1)\, dx \qquad h)\ \int_{-1}^{4} (t+1)(t-2)\, dt \qquad i)\ \int_{-1}^{1} (x+1)(x+2)\, dx \qquad j)\ \int_{-1}^{1} x^{41}(x-1)(x+1)\, dx$$

7. Calcular las integrales

$$a)\ \int_2^5 \frac{1}{2x}\, dx \qquad b)\ \int_1^5 \frac{1}{x+1}\, dx \qquad c)\ \int_2^3 \frac{1}{2x+3}\, dx \qquad d)\ \int_1^4 \frac{1}{3x-2}\, dx$$

$$e)\ \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} \qquad f)\ \int_{-1}^{1} \frac{2x-1}{x+2} \qquad g)\ \int_0^2 \frac{3x-2}{2x-10}$$

8. Calcular cada una de las siguientes integrales. Dibuje la gráfica f en cada caso.

$$a)\ \int_0^2 f(t)\, dt, \text{ donde } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases} \qquad b)\ \int_{-1}^{2} |x(x-1)|\, dx$$

$$c)\ \int_0^1 f(x)\, dx, \text{ donde } f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le c \\ c\left(\frac{1-x}{1-c}\right) & \text{si } c < x \le 1 \end{cases} \quad \text{donce } c \text{ es un número ral finjado } 0 < c < 1$$

9.

a) A partir de la igualdad $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$ calcular $\int_2^5 \frac{1}{1-x^2}\, dx$.

b) Probar que dados $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_1 < \mu_2$, entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{(x-\mu_1)(x-\mu_2)} = \frac{\alpha}{x-\mu_1} + \frac{\beta}{x-\mu_2}$$

Calcular

$$\int_{\mu_2+1}^{\mu_2+5} \frac{1}{(x-\mu_1)(x-\mu_2)}\, dx$$

c) Calcular

$$\int_3^4 \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$$

d) Probar que dados $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_1 < \mu_2$, entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{x}{(x-\mu_1)(x-\mu_2)} = \frac{\alpha}{x-\mu_1} + \frac{\beta}{x-\mu_2}$$

Calcular

$$\int_{\mu_2+1}^{\mu_2+5} \frac{x}{(x-\mu_1)(x-\mu_2)}\,dx$$

e) Calcular

$$\int_3^5 \frac{x+5}{x^2+3x+2}\,dx$$

10. Calcular:

$$a)\ \int_3^4 \sqrt{3x}\,dx \qquad b)\ \int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx \qquad c)\ \int_5^7 \sqrt{x-3}\,dx \qquad d)\ \int_3^5 \sqrt{2x-1}\,dx \qquad e)\ \int_0^5 \sqrt{9-x}\,dx$$

11. Calcular el area encerrada por los gráficos de f y g en los siguientes casos:

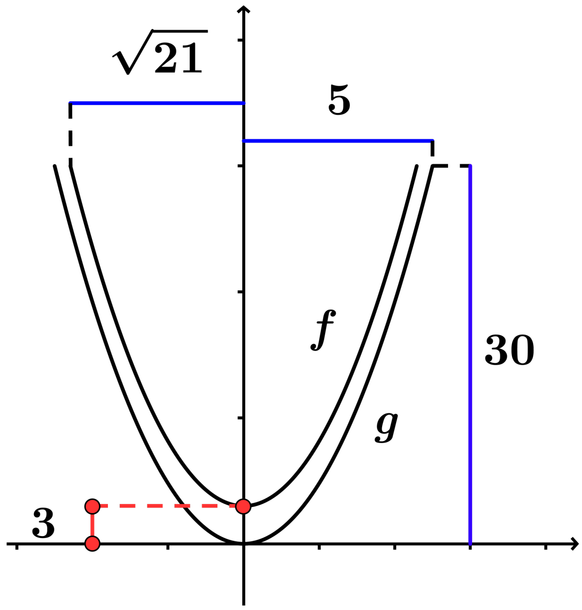
$$a)\ f(x)=x^2,\ g(x)=9 \qquad b)\ f(x)=x^2,\ g(x)=-2x+1 \qquad c)\ f(x)=x^2+x\ g(x)=-x^2$$

$$d)\ f(x)=x^2,\ g(x)=\sqrt{|x|} \qquad e)\ f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=1-x$$

3. Aplicaciones

1. **Áreas** (Examen julio 2017)

   El monumento a Luis Batlle Berres es una "U" hecha de hormigón con un revestimiento hecho de granulado de granito. Dicha "U" se define mediante dos parábolas, que son los gráficos de dos funciones a las que llamaremos $f(x)$ y $g(x)$. Las dimensiones aproximadas del monumento, expresada en metros, vienen dadas por la figura 1.



a) Determinar las expresiones de las funciones f y g

b) Calcular el área (en m^2) de la cara frontal del monumento

c) Asumiendo que el espesor del monumento es uniforme e igual a 2 metros y que su densidad es igual a $2300 kg/m^3$, calcular el volumen del monumento (en m^3) y su masa (en kg).

2. **Trabajo**

Suponga que una partícula p se mueve sobre una dirección fija. El trabajo W invertido sobre esta, por un agente que ejerce una fuerza F constante y colineal con el desplazamiento, es $W = F\Delta r$.

Bajo estas hipótesis:

- La fuerza F podría ser negativa
- El trabajo solo depende de la fuerza y el modulo del desplazamiento y no como ocurrió este desplazamiento.
- Si la partícula p se mueve desde el punto a hasta el punto b se tiene que $W = \int_a^b F(x)\,dx$.

Para trabajar con este problema debemos tener expresada la fuerza como función de la posición y no del tiempo. Por ejemplo, podríamos calcular el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria de la Tierra a un objeto que cae. Otro ejmplo, es la fuerza ejercida por un resorte.

Notemos como $W_a^b(F)$ al trabajo invertido por la fuerza F.

Propiedades esperables de esta cantidad

(I) Propiedad aditiva: Si $a < b < c$ entonces $W_a^c(F) = W_a^b + W_b^c$

(II) Propiedad monótona: Si $f \leq g$ en $[a, b]$ entonces $W_a^b(f) \leq W_a^b(g)$

(III) Fórmula elemental: Si F es constante, por ejemplo $F(x) = c$ para todo $x \in (a, b)$ entonces $W_a^b(F) = c(b-a)$

a) Probar que si F es constante a trozos entonces $W_a^b(F) = \int_a^b F(x)\,dx$.

b) Suponga que el trabajo se ha definido para una famila de funciones F de modo que satisface (I), (II) y (III). Probar que si F es una función integrable se cumple que $W_a^b(F) = \int_a^b F(x)\,dx$.

c) Un balón se suelta desde 20 metros de altura. Calcular el trabajo de la fuerza de gravedad cuando el balón toca el suelo.

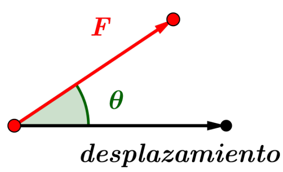
d) Una partícula se desplaza sobre una dirección desde $x = 0m$ hasta $x = 4m$. Esta partícula se encuentra sometida a una única fuerza F dada por $F(x) = \begin{cases} 1{,}5x & \text{si } x \leq 2 \\ 6-(1{,}5)(2-x) & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Calcular el trabajo realizado por F.

3. **Trabajo**

La definición de trabajo se puede adaptar cuando la fuerza no es colineal al movimiento.

El trabajo W invertido sobre un sistema por un agente que ejerce una fuerza constante sobre el sistema es el producto de la magnitud F de la fuerza, la magnitud Δr de desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y $\cos(\theta)$, donde θ es el ángulo entre los vectores fuerza y desplazamiento es $W = F\Delta r\cos(\theta)$



En el caso de que de que la fuerza sea variable en dirección y sentido pero la dirección del desplazamiento no, digamos que va desde a hasta b en el eje x, entonces el trabajo es $W = \int_a^b F(x)\cos(\theta(x))dx$.

Conjeturar sobre el por que de esta definición, apartir de la definición para fuerza constante.

a) (Práctico 6, Física 1)

Para empujar una caja de $25Kg$ hacia arriba sobre un plano inclinado a $27°$, un obrero ejerce una fuerza de $120N$, paralelea al plano. Cuando la caja se ha deslizado $3,6m$, ¿Cuanto trabajo se efectuó sobre la caja por

1) el obrero
2) la fuerza de gravedad, y
3) la fuerza normal al plano inclinado?

4. **Convolución**

La operación de convolución es una herramienta útil en muchas áreas tanto de matemática como de ingeniería. Por ejemplo: Procesamiento de imagenes, procesamiento de datos, acustica, ingenieria electrica, física (en particular en sistemas lineales).

Veremos algunos ejemplos de este operador, para las condiciones en las que estamos trabajando.

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables y tales que existen a_1, b_1, a_2, b_2 con $f(x) = 0$, $\forall x \not\in [a_1, b_1]$ y $g(x) = 0$, $\forall x \notin [a_2, b_2]$.

Definimos para f y g en estas hipótesis la convolución como $(f * g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(f * g)(t) = \int_{a_1}^{b_1} f(x)g(t-x)\,dx$$

a) Calcular $(f * g)$ para los siguientes casos.

1)
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

2)
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,2] \end{cases}$$

3)
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,2] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,2] \end{cases}$$

b) Probar que la convolución es una operación conmutativa.

4. Complementarios

1. Realice una lista con los tipos de funciones que sabe integrar, a partir de lo visto en el curso. Compare con sus compañeros.

2. **Inversa de la función logaritmo**

En este ejercicio se mostrara que existe un $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $f_a(x) = a^x$ es la inversa de $\log(x)$. Notemos así en este ejercicio $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a la función $f_a(x) = a^x$ definida en el práctico 4, sección: Funciones reales, ejercicio 6.

a) Mostrar que si $\log(a) = 1$ se tiene que $\log\left(a^{\frac{n}{m}}\right) = \frac{n}{m}$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$. Es decir la función $f_a|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ verifica $\log \circ f_a|_{\mathbb{Q}} = id$.

b) Mostrar que la función $\log \circ f_a$ es estrictamente creciente.

c) Sean A_x y B_x los conjuntos definidos por $A_x = \left\{\log\left(a^{\frac{n}{m}}\right) : n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0 \text{ y } \frac{n}{m} < x\right\}$ y
$B_x = \left\{\log\left(a^{\frac{n}{m}}\right) : n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0 \text{ y } \frac{n}{m} > x\right\}$.
Probar que $\alpha < \log(x)$ para todo $\alpha \in A_x$, y $\beta > \log(x)$ para todo $\beta \in B_x$.
Concluir que $\sup(A_x) \leq \log(a^x) \leq \inf(B_x)$ y por tanto $\log(a^x) = x\log(a)$. En particular si $\log(a) = 1$, tenemos que $\log \circ f_a = \mathrm{Id}$.

d) Probar que $\log(4) > 1$. Deducir que el conjunto $\{y : y \in \mathbb{R}^+, \log(y) < 1\}$ esta acotado superiormente.

e) Probar que $a = \sup(\{y : y \in \mathbb{R}^+, \log(y) < 1\})$ verifica que $\log(a) = 1$. Concluir que $\log \circ f_a(x) = x$.

Ejercicios mínimos obligatorios

- Día 1
  - Ejercicio 1.4
  - Ejercicio 2.2
  - Ejercicio 2.4 y 2.7 uno por fila
  - Ejercicio 2.9
- Día 2
  - Ejercicio 2.5 y 2.6 uno por fila
  - Ejercicio 2.10
  - Ejercicio 2.11 o 3.1
  - Ejercicio 3.3 o 3.4
  - Ejercicio 4.1