Práctico Semana 02

1. Conjuntos

1. Determinar cuantos subconjuntos de $A = \{1, 2, a, b, c\}$ tienen 2 elementos. Repetir lo mismo para 3 elementos.

2. Sean A, B y C los conjuntos dados por $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ y $C = \{7, 8, 9\}$
   Calcular:

   a) $A \cap B$ *b*) $B \cap C$ *c*) $A \cap C$ *d*) $A \cap B \cap C$

   e) $A \cup B$ *f*) $B \cup C$ *g*) $A \cup C$ *h*) $A \cup B \cup C$ *i*) $A \cup (B \cap C)$ *j*) $A \cap (B \cup C)$

   k) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ *l*) $(A \setminus C) \cup (C \setminus A)$ *m*) $A \cup (B \setminus C)$

3. Determinar todos los elementos de los siguientes conjuntos:

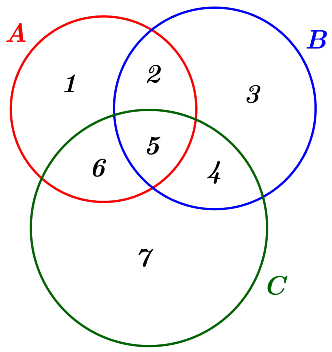
   a) $\{n \in \mathbb{N} : n \leq 5\}$ *b*) $\{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 12\}$ *c*) $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ *d*) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 2 = 0\}$

4. Determinar todos los elementos de los siguientes conjuntos:

   a) $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ *b*) $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ *c*) $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$

   d) $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ *e*) $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$

5. Sean A, B y C tres conjuntos como en la figura:



   Describir las regiones numeradas a partir de los conjuntos A, B y C y las operaciones binarias $\cup$, $\cap$ y $\setminus$.

6. Sean A y B dos conjuntos finitos. Ordene los siguientes conjuntos según la cantidad de elementos que tengan, en forma creciente:

   $$A,\ A \cap B,\ A \cup B,\ \emptyset,\ A \cup (B \setminus A)$$

7. Determinar si son verdaderas o falsas las siguientes equivalencias, justificando en cada caso. Cuando sean falsas determinar si alguno de los sentidos de la implicancia es verdadero.

   a) $(A \neq B) \Leftrightarrow [(A \not\subseteq B) \text{ y } (B \not\subseteq A)]$ *b*) $(A \neq B) \Leftrightarrow [(A \not\subseteq B) \text{ o } (B \not\subseteq A)]$

   c) $(A \not\subseteq B) \Leftrightarrow$ es falso que $B \not\subseteq A$ *d*) $(A \subset B) \Leftrightarrow [(A \cup C) \subset (B \cup C)]$

   e) $[(A \subset B) \text{ y } (A \subset C)] \Leftrightarrow [A \subset (B \cap C)]$ *f*) $[(A \subset B) \text{ o } (A \subset C)] \Leftrightarrow [A \subset (B \cup C)]$

8. Determinar cuáles de las siguientes igualdades e inclusiones son verdaderas o falsas. En caso de que una igualdad sea falsa determinar si se da alguna de las inclusiones.

   a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *b*) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *c*) $(A \cup B) \cap A = A \cup (B \cap A)$

   d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *e*) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

9. Determinar cuáles de las siguientes igualdades e inclusiones son verdaderas o falsas. En caso de que una igualdad sea falsa determinar si se da alguna de las inclusiones.

   a) $A \setminus (B \setminus A) = \emptyset$ *b*) $(A \setminus B) \setminus A = \emptyset$ *c*) $[A \setminus B] = [A \setminus (A \cap B)]$

   d) $A \setminus (A \setminus B) = B$ *e*) $[A \cap (B \setminus C)] = [(A \cap B) \setminus (A \cap C)]$ *f*) $[A \cap (B \setminus C)] = [(A \cap B) \setminus C]$

   g) $A \setminus (B \cup C) = [(A \setminus B) \cup (A \setminus C)]$ *h*) $A \setminus (B \cup C) = [(A \setminus B) \cap (A \setminus C)]$

10. Dado P un polinomio real, definimos el conjunto de las raíces de P como $A_P = \{x \in \mathbb{R} : P(x) = 0\}$

    a) ¿Existe P tal que $A_P = \emptyset$?

    b) Sean P y Q dos polinomios, probar que:

    a) $A_P \cup A_Q = A_{PQ}$ *b*) $A_P \cap A_Q = A_{P^2+Q^2}$

    c) Explicar por qué no es cierto que $A_P \cap A_Q = A_{P+Q}$. ¿Se da alguna inclusión entre estos conjuntos?

11. **Suma de conjuntos**

    Dados dos conjuntos no vacíos $A, B \subset \mathbb{R}$ definimos $A + B$ al conjunto $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$

    a) Calcular $\{-1, 0, 1\} + \{-2, 0, 2\}$ y $\{-5, 0, 10\} + \{-0, 1, 2\}$.

    b) Probar que si $B \subset C$ entonces $A + B \subset A + C$ para cualquier A.

    c) Dados $a, b, p \in \mathbb{R}$ con $a < b$ calcular $\{p\} + [a, b]$ y $\{p\} + (a, b)$.

    d) Calcular $\{1, 10\} + [2, 4]$ y $[1, 10] + \{2, 4\}$. Repetir para $\{1, 10\} + (2, 4)$ y $(1, 10) + \{2, 4\}$.

    e) Calcular $[0, 1] + [2, 5]$ y $[0, 1] + (2, 5)$.

    f) Discutir sobre condiciones para que $A \subset A + B$.

12. **Producto cartesiano**

    En este ejercicio todos los conjuntos considerados son no vacíos.

    a) Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Listar todos los elementos de $A \times B$ y de $B \times A$.

    b) Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Probar que si $(x, y) \in A \times B$ y además $(x, y) \in B \times A$ entonces $\{x, y\} \subset A \cap B$.

    c) Probar que si $A \times B = B \times A$ entonces $A = B$.

13. Bosquejar en un par de ejes coordenados (es decir, en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$), los siguientes conjuntos:

    a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 2\}$ *b*) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = -3\}$ *c*) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y\}$

2. Funciones

1. **Funciones naturales**

   Para las siguientes funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ realizar los bosquejos de los primeros valores.

   a) $f(n) = n$ *b*) $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$ *c*) $f(n) = (-1)^n$

   d) $f(n) =$ Primer dígito (cifra) de n en su representación decimal.

   e) $f(n) =$ cantidad de ocurrencias del dígito 7 en la representación decimal de n.

   f) $f(n) = \prod_{i=1}^{k} p_i$ donde $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}$ es la descomposición de n en factores primos.

2. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Calcular:

   a) $f(f(x))$ (¿Para qué x tiene sentido?) *b*) $f\left(\frac{1}{x}\right)$ *c*) $f(cx)$

   d) $f(x_1 + x_2)$ *e*) $f(x_1) + f(x_2)$

   ¿Para que números c existe un número x tal que $f(cx) = f(x)$? (indicación: hay muchos más de los que podría parecer a primera vista).

   ¿Para qué números c se cumple que $f(cx) = f(x)$ para al menos dos valores distintos de x?

3. Para los siguientes pares de funciones calcular $f \circ g$, $g \circ f$ y $f + g$.

   a) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3x - 1$

   b) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^3 - x^2 - 4$

   c) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \le 0 \\ x-1 & 0 < x \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ 2x & 0 < x \end{cases}$

   d) $f(x) = |x + 1|$, $g(x) = |2x|$

   e) $f(x) = x + 1$, $g(x) = \text{máx}\{1, x - 1\}$

   f) $f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & x \le 0 \\ x-8 & 0 < x \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ 2x & 0 < x \end{cases}$

   g) $f(x) = |2x + 1|$, $g(x) = x^2 + x + 1$

   h) $f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & x \le 0 \\ x-8 & 0 < x < 2 \\ 5 & x \ge 2 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x-1 & x \le 0 \\ -1 & 0 < x < 2 \\ \frac{1}{x} & x \ge 2 \end{cases}$

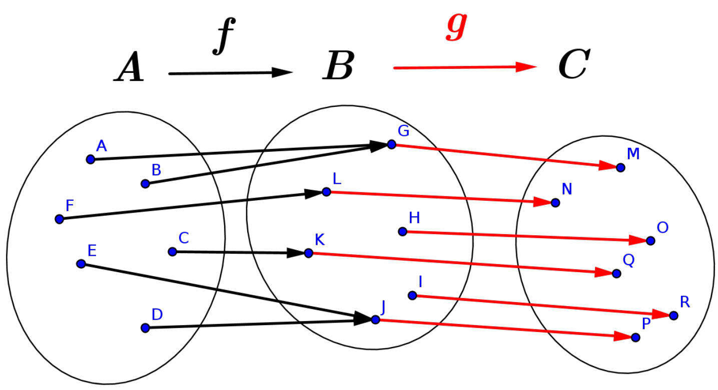
   i) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{x}{2} & 0 < x < 4 \\ 1-x & x \ge 4 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+3 & x \le 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$

4. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ funciones. Demuestre o de un contraejemplo de las siguientes afrimaciones

   a) $f \circ (g + h) = f \circ h + f \circ g$ *b*) $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$

   c) $\dfrac{1}{f \circ g} = \dfrac{1}{f} \circ g$ *d*) $\dfrac{1}{f \circ g} = f \circ \dfrac{1}{g}$

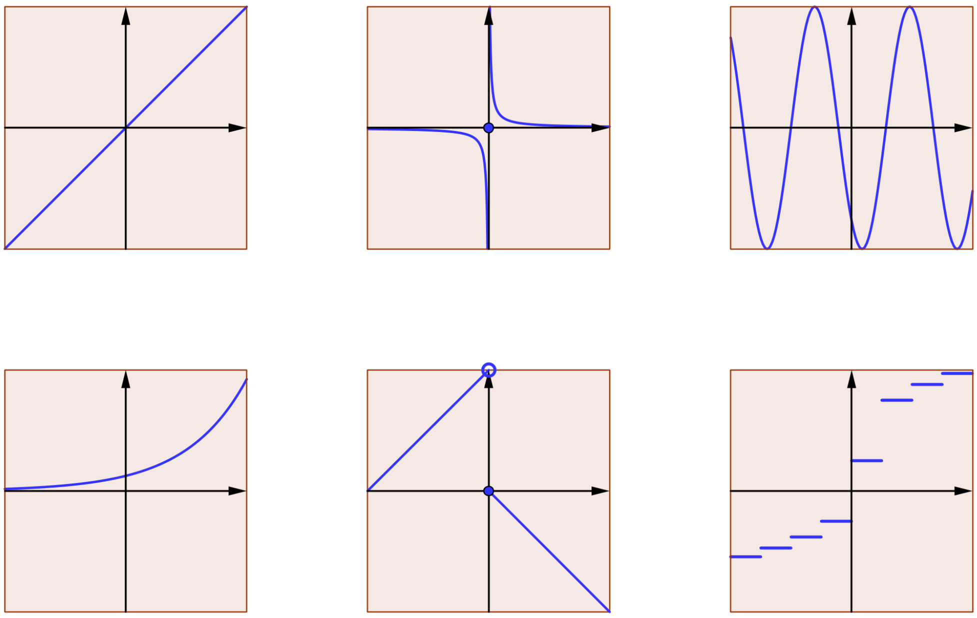
5. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones dadas por el siguiente diagrama



a) Calcular $g \circ f$

b) Para las funciones f, g y $g \circ f$, determinar cuales son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

6. Determinar para los siguientes bosquejos de funciones cuales son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:



7. Determinar para las siguientes funciones $f : A \to B$ cuales son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:

a) $A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{N},\ f(x) = x + 5$ *b*) $A = \mathbb{Z},\ B = \mathbb{Z},\ f(x) = x + 5$ *c*) $A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R},\ f(x) = x + 5$

d) $A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{N},\ f(x) = 2x$ *e*) $A = \mathbb{Z},\ B = \mathbb{Z},\ f(x) = 2x$ *f*) $A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R},\ f(x) = 2x$

g) $A = \mathbb{Z},\ B = \mathbb{Z},\ f(x) = x^3$ *h*) $A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R},\ f(x) = x^3$

8. **Funciones afines**

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función afín, esto es $f(x) = ax + b$ donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

   a) Probar que si $b = 0$ entonces para todo par $x, z \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x+z) = f(x) + f(z)$ y $f(xy) = xf(y)$. Mostrar que esto no es válido si $b \neq 0$.

   b) Probar que f es biyectiva determinando su inversa.

   c) Determinar qué funciones afines conmutan con $g(x) = x + 2$. Repetir para $h(x) = 2x$.

9. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones. Probar que:

   a) Si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.

   b) Si $g \circ f$ es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva.

10. Sean A, B dos conjuntos no vacíos y $f : A \to B$ una función. Probar que para cualquier par de subconjuntos $A_1, A_2 \subset A$ con $A_i \neq \emptyset$ se tiene que:

    a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

    b) $f(A_i \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

    c) Si f es inyectiva entonces $f(A_i \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

3. Aplicaciones

1. **Escalas**

   a) Los cambios de unidades de medida muchas veces estan dados por funciones lineales. Por ejemplo, la función de conversión de escala de grados Celsuis a Fahrenheit esta dada por la expresión: $h(t) = 32 + (1{,}8)t$. Es decir que t grados Celsius corresponden a $h(t)$ grados Fahrenheit.

      1) Determinar a cuántos grados Celsius corresponden 100 grados Fahrenheit.

      2) Calcular la función de conversión de escala de grados Fahrenheit a Celsius.

   b) Busque la relación pie - metro. Dadas una regla de 1 pie y una de 0.25 metros, determinar cuál de las dos es mas larga. Si se tiene un cubo con volumen de 0.01 pie^3. ¿Cuál es su volumen en cm^3?

   c) Busque la relación milla - metro. Si se tienen sembradas 10 millas cuadradas de tierra con trigo. ¿Cuál es la superficie sembrada si la medimos en metros cuadrados?

2. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida como

   $$f(x) \text{ es el volumen en expresado en } m^3 \text{ de un cubo de lado } x \text{ m.}$$

   Usamos una regla de precisión 0,01 m para medir las dimensiones de un cubo. Obtenemos que la medida de su lado es x_0. ¿Cuánto es el mayor error posible entre el volumen real del cubo y $f(x_0)$? ¿Cómo varía el error máximo en función del volumen del cubo?

3. La tarifa actual del taxi en Montevideo es de

   - Bajada de bandera con 100 metros: $\$30,72$
   - Ficha cada 100 metros: $\$1,78$

   a) Graficar la función F que relacciona metraje recorrido con precio, esto es $F(x)$ es el precio por recorrer x metros.

   b) Estime el costo para ir desde la explanada de la Universidad hasta la Facultad de Ingeniería.

c) Si por viajar en la noche el conductor nos cobra un 20% de recargo. ¿Cambia el bosquejo de la función?

4. Temperatura del Aire

   Cuando el aire asciende se dilata, y al dilatarse se enfría a una razón de 1° C cada 100 m de ascenso hasta unos 12 km.

   a) Si la temperatura del suelo es de unos $20°C$, calcule la función que describe la temperatura para una altura h.

   b) ¿Qué intervalos de temperatura se pueden esperar en un avión que alcanza una altitud máxima de 5 km?

5. La empresa MU decidió abrir una nueva oficina pequeña y evalúa qué servicio de UTE contratar. Los que están a consideración son los siguientes[1]:

   - Tarifa residencial simple

     Para los servicios con modalidad de consumo residencial cuya potencia contratada sea menor o igual a 40 kW:

Cargo por consumo de energía	
1 kWh a 100kWh mensuales	$ / kWh 4,881
101 kWh a 600kWh mensuales	$ / kWh 6,121
601 kWh en adelante	$ / kWh 7.630
Cargo por potencia contratada	$ / kW 58,3
Cargo fijo mensual	$ 188,2

   - Tarifa general simple

     Para servicios no comprendidos en tarifa residencial simple y alumbrado publico, cuya potencia contratada sea menor o igual a 40 kW:

Cargo por consumo de energía	
1 kWh a 1000 kWh mensuales	$ / kWh 5.179
1001 kWh en adelante	$ / kWh 5.945
Cargo por potencia contratada	$ / kW 58,3
Cargo fijo mensual	$ 202,1

   Asumiendo que la potencia contratada será de 30 kW

   a) Bosqueje las gráficas de costo en función de consumo para ambos servicios.

   b) Determine cuál servicio es más conveniente en función del consumo.

[1] Datos Pliego Tarifado UTE 2018

6. **Costos industriales**

UTE tiene una planta eléctrica en el río Negro, en un sector donde el torrente tiene un ancho de 240 metros. Tender un cable de la planta hasta un lugar de la ciudad que se encuentra a 3,2 km río abajo en el lado opuesto cuesta US$54 por metro a través del río y US$30 por metro en tierra.

Suponga que el cable va desde la planta a un punto Q en el lado opuesto del río, lugar que se ubica a x metros del punto P directamente opuesto a la planta. Escriba una función $C(x)$ para determinar cuánto costaría tender el cable en términos de la distancia x.

Ejercicios mínimos obligatorios

- Día 1
  - Ejercicio 1.2: dos por fila
  - Ejercicio 1.4
  - Ejercicio 1.8 una parte y 1.9 una parte
  - Ejercicio 1.7 una parte
- Día 2
  - Ejercicio 1.11
  - Ejercicio 2.3: 3 partes
  - Ejercicio 2.4
- Día 3
  - Ejercicio 3.1
  - Ejercicio 3.6
  - Ejercicio 2.3: 1 parte (a partir de f))
  - Ejercicio 2.8