Práctico Semana 15

1. Cálculo de integrales

1. Calcular integrando por partes:

$$a)\ \int x\cos(x)\,dx \qquad b)\ \int x^3e^{-x}\,dx \qquad c)\ \int x\operatorname{arc\,tg}(x)\,dx \qquad d)\ \int x^2\log x\,dx$$

$$e)\ \int \log(x)\,dx \qquad f)\ \int \operatorname{sen}^2 x\,dx \qquad g)\ \int \cos x \operatorname{sen} x\,dx \qquad h)\ \int \sin\left(\sqrt{x}\right)dx$$

$$i)\ \int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx \qquad j)\ \int \arctan\left(\frac{1}{x}\right)dx \qquad k)\ \int \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx \qquad l)\ \int \log^2(x)\,dx$$

2. Integrar usando el método de sustitución:

$$a)\ \int (2x+3)^7\,dx \qquad b)\ \int \frac{x}{\sqrt{1+8x^2}}\,dx \qquad c)\ \int \operatorname{sen} x\cos^3 x\,dx \qquad d)\ \int \frac{\log x}{x}\,dx$$

$$e)\ \int \frac{x}{1+9x^2}\,dx \qquad f)\ \int \frac{1}{e^{5x}}\,dx \qquad g)\ \int x^2\sqrt{1-x^3}\,dx \qquad h)\ \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}\,dx$$

$$i)\ \int x^2\sqrt{x+3}\,dx \qquad j)\ \int x^{n-1}\sin(x^n)\,dx \qquad k)\ \int xe^{x^2}\,dx \qquad l)\ \int \frac{\sin(x)\,dx}{(3+\cos(x))^3}$$

3. Calcular las siguientes integrales aplicando el cambio de variable que se indica

$$a)\ \int_2^5 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}\,dx \quad x=t^2+1 \qquad b)\ \int_0^2 \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,dx \quad x=4\sin^2(t)-2$$

4. Sea $f:[0,8]\to\mathbb{R}$ continua con derivada continua y tal que $f(0)=f(2)=0$. Determinar si son verdaderas las siguientes igualdades:

$$(1)\ \int_0^8 f(x)\,dx = 3\int_0^2 f(x^3)x^2\,dx \quad (2)\ \int_0^2 e^x f'(x)\,dx = -\int_0^2 e^x f(x)\,dx$$

5. Si se aplica la sustitución $x=\sin(t)$ a la integral $\int_0^\pi t^3\cos(t)\,dt = \int_0^0 (\arcsin(x))^3\,dx = 0$ ¿ Por que es equivocado este razonamiento?

6. Calcular, utilizando fracciones simples, las siguientes integrales de funciones racionales:

$$a)\ \int \frac{x-1}{x^2-x-2}\,dx \qquad b)\ \int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx \qquad c)\ \int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx \qquad d)\ \int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$$

$$e)\ \int \frac{x}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx \qquad f)\ \int \frac{4x-3}{3x^2+3x+2}\,dx \qquad g)\ \int_2^4 \frac{dx}{(2x^2+1)(x-1)}$$

$$h)\ \int \frac{x^2+x}{x^2-1}\,dx \qquad i)\ \int \frac{x^4}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$$

7. Sea f continua. Demostrar que $\int_0^\pi x f(\mathrm{sen} x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\mathrm{sen} x)\,dx$. Calcular $\int_0^\pi \frac{x\,\mathrm{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

8. Calcular las integrales

$$a)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \qquad b)\ \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}\,dx \qquad c)\ \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad d)\ \int \frac{1}{\cos(x)}\,dx$$

$$e)\ \int \frac{\arcsin(x)}{x^2}\,dx \qquad f)\ \int \sin\left(\sqrt[4]{x-1}\right)dx \qquad g)\ \int \frac{2\,dt}{e^{-t}+1} \qquad h)\ \int \frac{x+2\sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$i)\ \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \qquad j)\ \int \frac{1}{a^2x^2+b^2}\,dx \qquad k)\ \int \frac{x\sin(x)}{1+x^2}\,dx \qquad l)\ \int \frac{\sin^5(x)}{\cos^4(x)}\,dx$$

9. Calcular las integrales

$$a)\ \int \sin^7(x)\,dx \qquad b)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} \qquad c)\ \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2x-x^2}} \qquad d)\ \int \frac{dx}{x^{3/2}+x^{1/2}}$$

$$e)\ \int \frac{2e^x+2e^{-x}}{e^{-x}+3e^x}\,dx \qquad f)\ \int \frac{1}{1+\sin(x)}\,dx \qquad g)\ \int \sqrt{x^2-1}\,dx$$

10. Demostrar que $\int_0^1 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\,dx, \quad n\in\mathbb{N}$

11. Calcular las siguientes integrales

$$h)\ \int_1^e \frac{1}{x}\sin^3(1+\log(x))dx \qquad i)\ \int_2^4 \frac{dx}{(2x^2+1)(x-1)} \qquad j)\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx$$

12.
   a) Sea $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$.
   Demostrar que $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$. Calcular I_2, I_3.
   Determinar una fórmula general en función de n.
   b) Sea $I_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $I_n(x) = \int_0^x t^n e^t\,dt$
   Probar que $I_n(x) = x^n e^x - nI_{n-1}(x)$ para todo $n\geq 1$
   c) Sea $I_n : \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ la función definida por $I_n(x) = \int_0^x \log^n(t)\,dt$
   Probar que $I_n(x) = x\log(x)^n - nI_{n-1}(x)$ para todo $n\geq 1$

13. Sea $f(n) = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,dx$, $n\geq 1$.
   Demostrar que:
   a) $f(n+1) < f(n)$
   b) $f(n)+f(n+2) = \frac{1}{n-1}$ si $n>2$
   c) $\frac{1}{n+1} < 2f(n) < \frac{1}{n-1}$ si $n>2$

14.
   a) Sea $I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ $n\in\mathbb{N}$. Integrando por partes deducir la fórmula de recurrencia

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)}\left(\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}(x)\right) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

   b) Calcular

$$k)\ \int \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx \qquad l)\ \int \frac{2x+3}{(x^2+9)^2} \qquad m)\ \int \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx$$

15. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$a)\ \int \frac{\sec^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}\,dx \qquad b)\ \int \mathrm{tg}^3(2x+1)\sec^2(2x+1)\,dx$$

Recordar que $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

2. Aplicaciones

1. Calcular el área del círculo de radio r. Calcular el área de la elipse de de ejes de medida $2a$ y $2b$
2. El volumen de un cuerpo de revolución se puede calcular usando la fórmula

$$V = \int_a^b \pi r(x)^2 dx$$

donde $r(x)$ es el radio del círculo obtenido al girar la figura alrededor del eje de revolución. Usando esta fórmula calcular los siguientes volúmenes:

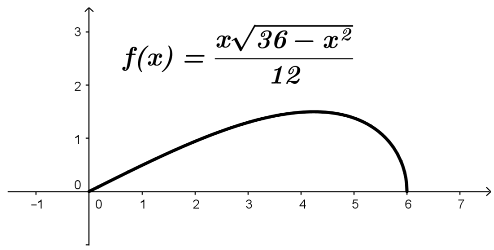
   a) volumen de la esfera de radio R;

   b) volumen del cono recto de base circular de radio R y altura h;

   c) volumen de la copa (o paraboloide elíptico): $x^2 + y^2 = z \leq 1$ (en la intersección con el plano $x = 0$ se tiene parábola $z = y^2$).

3. Diseño de una aplomada.

Se le ha pedido que diseñe una aplomada que pese alrededor de 190g. Para cumplir su cometido decide que su forma debe ser similiar al sólido de revolución generado por la funcion f de la figura. Determine el volumen de la aplomada. Si para su fabricación elgie un laton que tiene densidad de $8{,}5 g/cm^3$. Cuánto pesará la aplomada?



4. (*Segundo parcial primer semestre 2014*)
Tenemos un cono de altura h y radio en la base r.

   a) Sabemos (no se pide demostrar) que el área de revolución engendrada por el giro de la curva $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, alrededor del eje Ox es:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

   Calcular el área de la superficie del cono de revolución (sin base) de altura h y radio de la base igual a r.

   b) Deducir la fórmula del volumen del cuerpo de revolución que resulta de girar la curva $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, alrededor del eje Ox.

   c) Calcular el volumen del cono de revolución de altura h y radio de la base igual a r.

   d) Una marca famosa de helados está lanzando un nuevo cono helado. El cono debe llevar 50π cm^3 de helado (y no puede sobresalir del cono). El material que se usa para hacer el envoltorio es costoso, por tanto se quiere que el cono tenga la menor superficie posible. Calcular h y r del nuevo cono helado.

5. Recordemos que la longitud de arco de una curva $f(x)$ para $a \leq x \leq b$ está dada por la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

a) Calcular la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

usando la sustitución $y = x + \sqrt{1+x^2}$.

b) Probar que la longitud del arco de la parábola $f(x) = ax^2$ para un $a \in \mathbb{R}$ y el intervalo $[0, b]$ es igual a

$$\frac{b}{2}\sqrt{1+4a^2b^2} + \frac{1}{4a}\log|2ab + \sqrt{1+4a^2b^2}|.$$

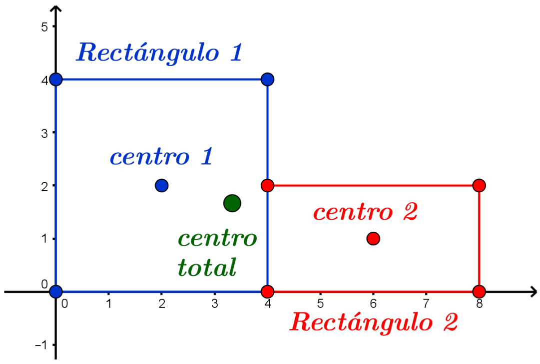
Sugerencia: usar integración por partes, luego sumar y restar 1 en el lugar apropiado de la integral obtenida y terminar aplicando la parte a).

6. El centro de gravedad de una superficie plana se define, conceptualmente, de la siguiente manera:

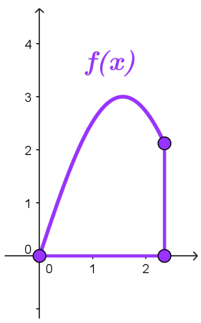
Un trozo de cartón rígido, plano y horizontal, permanecera en equilibrio si se sostiene en un punto determinado. Este punto de apoyo es el centro de gravedad de la superficie plana del carton.

Claramente para un cuadrado, un rectangulo, una circunferencia y un triangulo equilatero el centro de gravedad coincide con el centro geometrico de la figura.

Si se pegan 2 rectangulos como en el de la figura entonces el centro de gravedad es centro total.



Para una superficie como la de la figura el centro de gravedad es (M_x, M_y), donde $M_y = \int_a^b f(x)^2 dx$ y $M_x = \int_a^b f(x) x dx$. Bosquejar un argumento sobre esta fórmula apartir del caso de los rectángulos.



a) Hallar el centro de gravedad de la superficie comprendida bajo una arcada de la sinusoide ($f(x) = \sin(x)$)

b) Calcular el centro de gravedad de la figura comprendida entre la parábola $x^2 - 1$ y el eje Ox. Repetir la cuenta para la figura anterior intersección el primer cuadrante.

c) Calcular el centro de gravedad de un semicírculo. Calcular el centro de gravedad de una semi elipse

3. Complementarios

1. Suponga que f' es integrable en $[0,1]$ y que $f(0)=0$. Demuestre que para todo $x\in[0,1]$ se verifica

$$|f(x)| \leq \sqrt{\int_0^1 |f'(x)|^2\ dx}$$

Demuestre que la hipotesis $f(0)=0$ es necesaria.

2. **Integrales de funciones trigonometricas racionales**
Recordando que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ y $\cos(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, expresar $\sin(x)$, $\cos(x)$ y $\tan(x)$ en función de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

   a) Probar que integrales de la forma $\int R(\text{sen}(x), \cos(x))dx$ donde R es una funcion racional, pueden ser reducidas mediante sustitución $u = \tan(\frac{x}{2})$ a integrales de la forma $\int r(u)du$, donde r es tambien es una funcion racional. Calcular

$$a)\quad \int \frac{dx}{\cos(x)+\sin(x)} \qquad \text{y} \qquad b)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)dx}{1+\cos(x)+\sin(x)}$$

   b) Idem con $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})$ y la sustitucion $x = a\sin(t)$. Calcular

$$\int \frac{xdx}{4-x^2+\sqrt{4-x^2}}$$

   c) Idem con $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})$ y la sustitución $x = a\sinh(t)$. Calcular

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$$

   d) Idem con $\int R(x, \sqrt{-a^2+x^2})$ y la sustitucion $x = a\cosh(t)$. Calcular

$$\int \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x^2}$$

3. *a*) Demuestre que si f es continua entonces

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right)du$$

   b) Demuestre que si f es continua

$$\int_0^x f(u)(x-u)^2 du = 2\int_0^x \left(\int_0^{u_1} (f(t)dt)du_1\right)du_2$$

4. *a*) Integrando por partes deducir la formula

$$\int \sin^n(x)dx = -\frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)dx \qquad \forall n \leq 2$$

   b) Hallar una formula de recurrencia para $\int \cos^n(x)dx$

c) Calcular

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx \qquad b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\,dx \qquad c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,dx$$

d) Por definición el doble factorial es $n!! = \pi_{k=0}^{m}(n-2k)$ donde $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ y $0!! = 1$. Sea $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$. Probar que

$$a_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \qquad \text{y que} \qquad a_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

e) Mostrar que $1 \leq \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$. Deducir que $\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} 2n\left(\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$ y concluir que $\sqrt{\pi} = \lim_{n\to 0} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}$

f) Calcular las integrales

$$a) \int \sin^{2n}(x)\cos^{2m+1}(x)\,dx \qquad b) \int \sin^{2n}(x)\cos^{2m}(x)\,dx$$

5. Realize una lista de familias de funciones que sabe integrar, por ejemplo: polinomios, $\sin^2(ax)$, etc. Revisar cuantas de las integrales del práctico estan incluidos en esa familia. Compare con sus compañeros.