Práctico Semana 14

1. Cálculo en derivadas

1. Determinar en cada caso los parametros para que las siguientes funciones sean derivables

a) 2015, primer parcial. $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \leq \pi \\ cx^2 + d & \text{si } x > \pi \end{cases}$ *b*) $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x < 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

2. Calcular los siguientes límites usando la regla de L'Hôpital:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ *b*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ *c*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ *d*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$

3. Determinar si existen, y en caso de existencia, calcular los siguientes límites usando la regla de L'Hôpital:

a) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ *b*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(ax)}{\text{sen}(bx)}$ $b \neq 0$ *c*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1 - \sin(x)}{x^2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - x^2}{x^4}$ *e*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x+x^2} - 1 - (x + x^2)}{x^2}$ *f*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x + x^2) - x}{x^2}$

g) Primer parcial, 2012 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^5}$

h) Segundo parcial, Primer semestre 2015 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x\cos(x)}{12x^2 + x^3}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ *j*) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^n}$ $n > 0$ *k*) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x^a)}{x}$ $a > 0$

4. Primer parcial, primer semestre 2014, MO
El límite cuando $x \to 0$ de
$$\frac{\sin(x) - x}{\log(1+x) - 1 - 2x + e^x}$$
es:

a) 0 *b*) $\frac{-1}{3}$ *c*) $\frac{1}{6}$ *d*) $\frac{2}{3}$ *e*) 3

5. Segundo parcial, primer semestre 2014
Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcular el valor del límite
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+x^2) - \sin(x) + x + \frac{x^5}{5!}}{x^\alpha}$$

a) $\frac{-1}{2}$, si $\alpha = 5$
b) 0, si $\alpha > 5$

c) $\frac{7}{6}$, si $\alpha = 3$

d) $\frac{-1}{3}$, si $\alpha = 3$

e) no existe el límite si $\alpha \geq 3$

6. Primer parcial, segundo semestre 2013 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determinar a, b, c, d para que f sea derivable.

7. Examen, diciembre 2013

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{\sin(\alpha x)} & \text{si } x \geq 0 \\ \log(\beta(x+\gamma)) & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Solo una de las siguientes ternas (α, β, γ) hace que f sea derivable en 0. Decidir cual:

a) $\alpha = 1, \beta = e, \gamma = \frac{1}{2}$ *b*) $\alpha = 1, \beta = 2e, \gamma = 1$ *c*) $\alpha = 2, \beta = e, \gamma = 2$

d) $\alpha = 2, \beta = e, \gamma = 1$ *e*) $\alpha = 2, \beta = 2e, \gamma = \frac{1}{2}$

8. *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada.
Probar que si $f(a) = f'(a) = 0$ entonces fg es derivable en a

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(a) > 0$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{cases} f(x) > f(a) & \text{si } x \in (a, a+\delta) \\ f(x) < f(a) & \text{si } x \in (a-\delta, a) \end{cases}$$

2. Teorema fundamental

1. Sin calcular la integral, derivar las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 - t + 1}\, dt$ *b*) $f_2(x) = \int_x^3 \sqrt{t^2 - t + 1}\, dt$ *c*) $f_3(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t^2 - t + 1}\, dt$

d) $f_4(x) = \int_{\cos(x)}^3 \sqrt{t^2 - t + 1}\, dt$ *e*) $f_5(x) = \int_{\tan(x)}^3 \sqrt{t^2 - t + 1}\, dt$ *f*) $f_6(x) = \int_{\cos(x)}^{\log(x)} \sqrt{t^2 - t + 1}\, dt$

g) $f_7(x) = \int_1^x \frac{e^t}{3 + \sin(t)}\, dt$ *h*) $f_8(x) = \int_0^{x^2} \frac{1 + \sqrt{t}}{2 + t}\, dt$ *i*) $f_9(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{t^7}{1 + t^4}\, dt$

2. Determinar (si existen) una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un número real $c \in \mathbb{R}$ tales que

a) $\int_1^x f(t)\, dt = x^2 - c$ *b*) $\int_c^x f(t)\, dt = 2 + x^2$ *c*) $\int_c^x f(t) dt = (x-1)^4$

d) $\int_c^x f(t)\, dt = \log(x)$ *e*) $\int_1^x f(t) dt = \log(x^2 + 2x + 2) - c$ *f*) $\int_0^x f(t) dt = c - e^{-x^2}$

3. Segundo parcial, segundo semsetre 2015.
   Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que la igualdad
$$\int_{e^x}^{e} f(t)\,dt = 3x^2 + \lambda$$
   es válida para todo $x \in \mathbb{R}$. Indicar la opción correcta

   a) $f(e^2) = -3e^2$ y $\lambda = -3$ *b*) $f(e^2) = \dfrac{-9}{e^2}$ y $\lambda = -3$ *c*) $f(e^2) = \dfrac{12}{e^2}$ y $\lambda = \dfrac{1}{3}$

   d) $f(e^2) = 3e^2$ y $\lambda = \dfrac{1}{3}$ *e*) $f(e^2) = \dfrac{-12}{e^2}$ y $\lambda = -3$

4. Examen, Diciembre 2015 Se considera la siguiente igualdad
$$\int_{a}^{x^2} f(t)\,dt = -1 + e^{-x^2}$$
   donde la función f es continua y a es un número real no negativo. Entonces:

   a) $f(1) = 0, a = 1$ *b*) $f(1) = -e, a = 1$ *c*) $f(1) = -e^{-1}, a = 0$

   d) $f(1) = 0, a = 0$ *e*) $f(1) = -1, a = 0$

5. *a*) Demueste que los valores de las siguientes expresiones no dependen del valor de x

   a) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ *b*) $\displaystyle\int_{-\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\,,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

   b) Calcule $(f^{-1})'(0)$ para

   a) $f(x) = \displaystyle\int_0^x 1 + \sin(\sin(t))\,dt$ *b*) $f(x) = \displaystyle\int_1^x \cos(\cos(t))\,dt$

   c) Halle una función g tal que

   a) $\displaystyle\int_0^x g(t)t\,dt = x + x^2$ *b*) $\displaystyle\int_0^{x^2} g(t)t\,dt = x + x^2$

6. Sea F la función definida como
$$F(x) = \frac{1}{2}\int_1^{x^2} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$$
   Entonces la derivada de la función inversa de F en 0 vale:

   a) $\sqrt{e}$ *b*) $2\sqrt{e}$ *c*) $\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$ *d*) $\dfrac{3\sqrt{e}}{2}$ *e*) $\dfrac{2\sqrt{e}}{3}$

7. Segundo parcial, primer semestre 2015.
   Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = \int_0^x \log(\sin^2(t) + 2)\,dt$.
   Se consideran las siguientes afirmaciones:

   (1) g es invertible en $\mathbb{R}$
   (2) $(g^{-1})(0) = \frac{1}{\log(2)}$

(3) g es derivable en $\mathbb{R}$

Indicar la opción correcta:

(A) Solo las afirmaciones 1 y 2 son verdaderas
(B) Solo la afirmación 3 es verdadera
(C) Solo la afirmación 1 es verdadera
(D) Solo las afirmaciones 2 y 3 son verdaderas
(E) Las tres afirmaciones son verdaderas

8. Sea $F(x) = \int_0^x f$. En cada uno de los siguientes casos indicar para qué valores de x se verifica que $F'(x) = f(x)$.

a) $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 1 \\ 1 \text{ si } 1 < x \end{cases}$ *b*) $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ *c*) $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q}, \text{ (fracción irreducible)} \end{cases}$

9. Sea f una función continua, monótona estricta en $[a, b]$ y derivable en (a, b).

a) Examen, febrero 2017. Probar que

$$\int_a^x f(t)\,dt + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - xf(x) + af(a) = 0 \ \forall x \in [a, b]$$

Interprete geométricamente el resultado.

b) Calcular $\int_1^2 \log(t)\,dt$, utilizando el resultado de la parte anterior.

10. Sea $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \int_x^{x+1} e^{-t^2}\,dt$

a) Probar que G es derivable en todo $\mathbb{R}$ y calcular $G'(x)$.
b) Graficar y estudiar extremos relativos y absolutos de G.

11. Indicar si es verdadero o falso que:
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y F una primitiva de f tal que $F(0) = 4$ necesariamente

$$\int_0^x F(t)f(t)dt = \frac{(F(x))^2}{2} - 8$$

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable con derivada positiva y tal que $f(1) = 0$. Definimos $g(x) = \int_0^x f(t)dt$
Cual de los siguientes enunciados son ciertos

a) La función g es continua
b) La función g es derivable
c) La gráfica de g tiene tangente horizontal en 1
d) La función g tiene un mínimo local en 1
e) La función g tiene un máximo local en 1
f) La función g tiene un punto de inflexión en 1
g) La grafica de g' corta al eje x en el punto $x = 1$

3. Cálculo de integrales

1.

   a) Utilizando los resultados del ejercicio 3 del práctico 12 sección Cálculo de derivadas

   $$a)\quad \int_a^b \sin^2(t)dt \qquad b)\quad \int_a^b \log(t)\,dt \qquad c)\quad \int_a^b \frac{1}{\cos^2(t)}\,dt$$

   b) A partir de las derivadas de las inversas trigonometricas, calcular:

   $$a)\quad \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad b)\quad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ \ a,b\in[-1,1] \qquad c)\quad \int_a^b \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ \ a,b\in[-1,1]$$

2. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función positiva y derivable, probar que

   a) $\int_a^b 2f'(t)f(t)dt = f^2(b)-f^2(b)$

   b) $\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \log(f(b))-\log(f(a))$

   c) $\int_a^b \frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}}dt = \sqrt{f(b)}-\sqrt{f(a)}$

   d) $\int_a^b f'(t)e^{f(t)}\,dt = e^{f(b)}-e^{f(a)}$

   e) Calcular las siguientes integrales

   $$a)\ \int \frac{1}{3x-1}\,dx \qquad b)\ \int \sin^6(x)\cos(x)\,dx \qquad c)\ \int \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}\,dx \qquad d)\ \int \frac{x-2}{(x^2-4x+5)^2}\,dx$$

   $$e)\ \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx \qquad f)\ \int \sqrt{e^x}\,dx \qquad g)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \qquad h)\ \int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx$$

   $$i)\ \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \qquad j)\ \int \operatorname{arctg} x\,dx \qquad k)\ \int \arcsin(x)\,dx \qquad l)\ \int \arccos(x)\,dx$$

3. Segundo parcial, primer semestre 2015.

   El valor de la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^3\,dx$ es

   $$a)\ \frac{-1}{4} \qquad b)\ \frac{2}{3} \qquad c)\ \frac{\pi^4}{64} \qquad d)\ \frac{\pi}{6} \qquad e)\ \frac{1}{4}$$

4. Examen, diciembre 2014

   Sean

   $$f(x)=\begin{cases} x+2+\sin(x)\cos(x) & \text{si } x\geq 0\\ x^2+3x+2 & \text{si } x>0\end{cases} \qquad \text{y} \qquad F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

   a) $F(x)$ es derivable y $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(t)\,dt = \frac{10}{3}-\frac{\pi}{8}+\pi$

   b) $F(x)$ es continua pero no derivable y $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(t)\,dt = \frac{3}{2}-\frac{\pi}{8}+\pi$

   c) $F(x)$ es continua pero no derivable y $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(t)\,dt = -\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}+\pi$

   d) $F(x)$ es derivable y $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}+\pi$

   e) $F(x)$ es continua pero no derivable y $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(t)\,dt = \frac{10}{3}-\frac{\pi}{8}+\pi$

5. A partir de un cambio de variable lineal calcular $\int \frac{1}{a^2x^2+b^2}\,dx$
6. Calcular integrando por partes:

$$a)\ \int x\sin(x)\,dx \qquad b)\ \int x2^{-x}\,dx \qquad c)\ \int x^2e^x\,dx \qquad d)\ \int x\,\mathrm{arc\,tg}(x)\,dx$$

$$e)\ \int x^2\log x\,dx \qquad f)\ \int \log(x)\,dx \qquad g)\ \int \mathrm{sen}^2 x\,dx \qquad h)\ \int \cos x\,\mathrm{sen}\,x\,dx$$

$$i)\ \int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx \qquad j)\ \int \arctan\left(\frac{1}{x}\right)dx \qquad k)\ \int \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx \qquad l)\ \int \log^2(x)\,dx$$

7. Se consideran las funciones $J, H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defindas por

$$J(x) = \arctan(x) - \frac{x}{x^2+1}, \quad H(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x^2}{x^2+1}} \sqrt{\frac{t}{1-t}}\,dt$$

   a) Calcular H', J', $J(1)$, $H(1)$.
   b) Hallar la forumla explicita de $H(x)$, distinguir para x positivo y negativo.