# Práctico Semana 13

## 1. Monotonía y extremos

1. Demuestre que la ecuación cúbica $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$, cualquiera sea el valor de $b$.

2. Demuestre que la ecuación $x^2 = x\mathrm{sen}(x) + \cos(x)$ tiene exactamente dos soluciones.

3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 4$.

   *a*) Hallar el intervalo de longitud máxima, que contenga al 0 en el que se puede definir la inversa de $f$.

   *b*) Sea $g$ la inversa de $f$, hallar $g'(4)$.

4. Primer parcial, segundo semestre 2015, MO
   Se considera la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = e^{2x} + x^3$. Entonces el valor de $(h^{-1})(1)$ es

   *a*) $\dfrac{1}{2}$ *b*) $\dfrac{1}{2e^2} + \dfrac{1}{3}$ *c*) $\dfrac{1}{2e^2 + 3}$ *d*) $\dfrac{1}{e^2 + 1}$ *e*) $1$

5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^{17} + x^{13} + x^7 + x^3 + 5x - 5$. Investigar si $f$ es invertible y en caso de que lo sea calcular $(f^{-1})'(4)$.

6. Primer parcial, 2007, MO Sea $f : [0, 2] \to [0, 2 - \log(3)]$ tal que $f(x) = x - \log(1 + x)$. Indicar la opción correcta

   *a*) $f$ no es invertible.

   *b*) $f$ es invertible y $(f^{-1})'(1 - \log(2)) = 2$

   *c*) $f$ es invertible y $(f^{-1})'(1 - \log(2)) = \frac{2-\log(2)}{1-\log(2)}$

   *d*) $f$ es invertible y $(f^{-1})'(1 - \log(2)) = \frac{1-\log(2)}{2-\log(2)}$

   *e*) $f$ es invertible y $(f^{-1})'(1 - \log(2)) = \frac{1}{2}$

7. Primer parcial, segundo semestre 2013, Desarrollo

   2. Probar que la ecuación $x^2\left(\frac{x^2}{4} + 1\right) = \log(x)$ tiene exactamente una raíz en el intervalo $(1, 2)$.

   3. Sea $g(x)$ la función inversa de $f(x) = \frac{x^2}{4} - x^2 + \log(x)$ para $x > 0$. Calcular si existe la derivada de $g$ en el punto $f(1)$, esto es $g'(f(1))$. Justificar.

8. Primer parcial, segundo semestre 2012, Ejercicio 3.b
   Sea $f : D \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 3x - 2\log(x)$

   i Halle el máximo intervalo que contenga a $x = 1$ donde se puede definir la inversa de $f$. Justifique

   ii Sea $g$ la inversa de $f$. Calcule $g'(f(1))$

9. Examen, agosto 2013, MO

   Se considera la función $f:\left(0,\frac{3}{2}\right)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\log|2x^3-3x|$. Sea $I\subset\left(0,\frac{3}{2}\right)$ el mayor intervalo abierto posible tal que $f$ es invertible en I y $f^{-1}$ es decreciente. Entonces:

   *a*) $I=\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{2}\right)$ y $(f^{-1})'(0)=-1$ *b*) $I=\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ y $(f^{-1})'(0)=-1$ *c*) $I=\left(0,\dfrac{3}{4}\right)$ y $(f^{-1})'(0)=-1$

   *d*) $I=\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{2}\right)$ y $(f^{-1})'(0)=0$ *e*) $I=\left(0,\dfrac{3}{4}\right)$ y $(f^{-1})'(0)=1$

10. Examen, febrero 2017, primer ejercicio de desarrollo partes 1 y 2

    1. Sea $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$. Demostrar que si $h'(0)$ para todo $x\in(a,b)$, entonces la función $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ es constante.
    2. Deducir que si $h_1,h_2$ son dos funciones continua en $[a,b]$ y derivables en $(a,b)$ tales que $h_1(a)=h_2(a)$ y $h_1'(x)=h_2'(x)$ para todo $x\in(a,b)$, entonces estas dos funciones son iguales: $h_1(x)=h_2(x)$ para todo $x\in[a,b]$

11. Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones derivables

    *a*) Suponga que $f'(x)>g'(x)$ y que $f(a)=g(a)$. Probar que $f(x)>g(x)$ para todo $x>a$ y $f(x)<g(x)$ para todo $x<a$

    *b*) Demuestre mediante un ejemplo que estas concluisiones no son válidas sin la hipotesis de $f(a)=g(a)$

12. Probar las siguientes desigualdades

    *a*) Para todo $x>0$, $\frac{x}{x+1}<\log(x+1)<x$

    *b*) Para todo $x,y\in\mathbb{R}$, $|\sin(\alpha x)-\sin(\alpha y)|\leq|\alpha||x-y|$

    *c*) Para $0<a<1$, se verifica que $(1+x)^a\leq 1+ax,\ \forall x\leq 1$

13. Calcular los extremos de las siguientes funciones en los dominios indicados

    *a*) $f(x)=x^3-x^2-8x+1$ en $[-2,2]$ *b*) $f(x)=x^5+x+1$ en $[-1,1]$ *c*) $f(x)=(x+2)^3(3-x)$ en $[-1,2]$

    *d*) Segundo parcial, 2016, MO: $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ en $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$ *e*) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ en $[0,5]$

    *f*) $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}+\dfrac{1}{1+|x+a|}$ $,a>0$, en $\mathbb{R}$

    *g*) $f(x)=\sin(x)+\cos(x)$ en $[-2\pi,2\pi]$ *h*) $f(x)=\sin(x)-\cos(x)$ en $[-2\pi,2\pi]$

14. Determinar si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tienen máximo y mínimo y en caso de existencia determinarlos.

    *a*) $f(x)=2x+1$ *b*) $f(x)=x^2+3x+1$ *c*) $f(x)=e^{-x^2}$ *d*) $\left|x^7+2x^5+x^4-x^3+3\right|$

15. Determinar si $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x+\frac{1}{x}$ tiene máximo y mínimo y en caso de existencia determinarlos.

16. Determinar si $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=10x^2e^{-x}$ tiene máximo y mínimo y en caso de existencia determinarlos.

17. 

    *a*) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un polinomio. Probar que existe $y\in\mathbb{R}$, tal que $|f(y)|\leq|f(x)|:\ \forall x\in\mathbb{R}$.

*b*) Probar que si $n$ es par existe un número $y$ tal que $y^n + \phi(y) \leq x^n + \phi(x) : \forall x \in \mathbb{R}$

18. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas.

    *a*) Probar que $\text{máx}(f+g) \leq \text{máx}(f) + \text{máx}(g)$ y $\text{mín}(f+g) \geq \text{mín}(f) + \text{mín}(g)$.

    *b*) Dar desigualdades similares para $\text{mín}(f-g)$ y $\text{máx}(f-g)$

    *c*) Dar desigualdades similares para el caso de $fg$.

    *d*) Probar que en caso de existir el máximo de $f \circ g$, se verifica que $\text{máx}(f \circ g) \leq \text{máx}(f)$

    *e*) Dar ejemplos donde las desigualdades sean estrictas.

19. *a*) Dado $s > 0$, probar que entre todos los reales $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = s$, el valor $x^2 + y^2$ es minimo cuando $x = y$.

    *b*) Hallar el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo, teniendo la base inferior en el diámetro.

    *c*) Examen, febrero 2017, MO
    Sea $\varepsilon$ la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 16$. Se concidera un rectangulo cuyos lados son paralelos a los ejes, y cuyos vertices pertenecen a $\varepsilon$. ¿Cuál es la mayor área que puede tener dicho rectangulo?

    *a*) 4    *b*) $4\sqrt{2}$    *c*) 0    *d*) $8\sqrt{2}$    *e*) 16

20. Examen, diciembre 2016, VF

    Sean $f, g$ funciones reales continuas en $[a,b]$ derivables en $(a,b)$ y tales que $f(a) \neq f(b)$ y $g(a) \neq g(b)$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $\frac{f'(c)}{f(b)-f(a)} = \frac{g'(c)}{g(b)-g(a)}$

21. Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

    tiene derivada positiva en $x = 0$, pero no es creciente en ningún intervalo que contenga a $x = 0$ (tiene intervalos tan cercanos a $x = 0$ como se quiera en que su derivada es negativa, y por lo tanto, en esos intervalos es decreciente).

# 2. Aplicaciones

1. Discuta si la siguiente situación es posible, en caso de que lo sea de un ejemplo, sino explique que impide la situación. Se tiene un auto cuyo velocímetro marca siempre $4,2m/s$, además en el instante de salida $t = 0s$ se encuentra en la misma posición que en el instante $t = 10s$. ¿Se podría decir algo sobre la aceleración del vehículo?

2. Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronada con un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en el rectángulo y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal de color deja pasar la mitad luz (por unidad de superficie) que el blanco. Calcule las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un Perímetro constante dado. Repita el ejercicio para Área constante.

3. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo, si el rectángulo tiene como lados a) 10 y 10 cm. b) 12 y 18 cm.

4. Examen 2015, diciembre, MO

   Un profesor de plastica propone hacer una papelera cilíndrica y pintarla (la parte lateral más la base). La cantidad de pintura que se dispone alcanza para pintar un metro cuadrado. Utilizando toda la pintura disponible, ¿cuál es el volumen máximo (en metros cúbicos) que puede tener la papelera?

   Recordar que si un cilindro tiene altura $h$ y una base de radio $r$, el área lateral es de $2\pi rh$ el area de la base es $\pi r^2$ . Indicar la opción correcta.

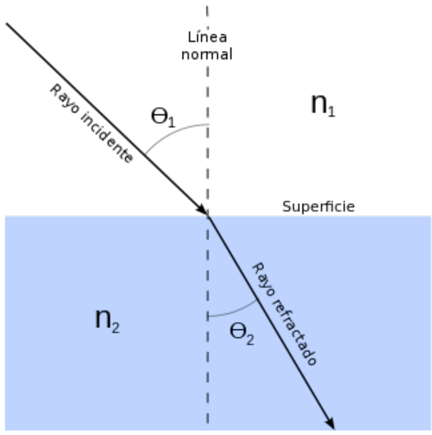
   $$a)\quad \frac{1}{(\sqrt{3})^3} \qquad b)\quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad c)\quad \frac{1}{3\sqrt{3\pi}} \qquad d)\quad \frac{\pi}{2} \qquad e)\quad \pi$$

5. Refracción de la luz

   La rapidez con que viaja la luz depende de el medio en el que se propague

| *Medio* | *Vacio* | *Aire* | *Agua ( a 20°)* | *Alcohol etilico* | *Cuarzo* |
|---|---|---|---|---|---|
| *Velocidad (m/s) Aprox* | 299,792,458 | 299,705,543 | 224,844,349 | 220,435,631 | 194,166,099 |

   Suponga que un rayo de luz viaja desde el punto A hasta el B atravez de distintos medios. La trayectoria de un rayo de luz es siempre de forma de minimizar el tiempo de viaje. Para obtener esto hay un quiebre en la dirección del ángulo, como muestra la figura.




   A el ángulo $\theta_1$ se lo llama ángulo de incidencia mientras que al álguno $\theta_2$ se lo llama ángulo de refracción

   *a*) Suponga que tiene en el plano dos medios, Aire en los puntos con coordenada $y$ positiva y Agua en los puntos con coordenada $y$ negativa
   Para los casos *a*) $A = (0,5), B = (0,-3)$ *b*) $A = (0,1), B = (1,-1)$ *c*) $A = (0,2), B = (2,3)$
   Calcular los ángulos de refracción e incidencia.

   *b*) Probar que si $c_1$ y $c_2$ son las velocidades de la luz en los medios 1 y 2 respectivamente se tiene la Ley de Smell, esto es

   $$\frac{\sin(\theta_1)}{c_1} = \frac{\sin(\theta_2)}{c_2} \tag{1}$$

6. Un globo de aire caliente que asciende en línea recta es rastreado por un observador a 150 metros. En el momento en que el ángulo de observación del observador es $\frac{\pi}{4}$, el ángulo crece a razón de 0,14 rad/min ¿Que tan rápido se esta elevando el globo en ese momento? Figura

7. El gasto cardiaco de una persona esta dado por la cantidad de sangre bombeada por unidad de tiempo.

   Gastos aproximados en algunas situaciones

| *Actividad* | *Lectura* | *Reposo* | *Maraton* |
|---|---|---|---|
| *Gasto* | 7 $L/m$ | 6 $L/m$ | 30 $L/m$ |

   El gasto cardiaco puede calcularse mediante la formula $y = \frac{Q}{D}$
   donde $Q$ es la cantidad de mililitros de $CO_2$ que se exhala en un minuto y $D$ es la diferencia entre la concentración de $CO_2$ (mL/L) en la sangre bombeada a los pulmones y la concentración de $CO_2$ en la sangre que regresa a los pulmones.

   Suponga que sabemos que $Q = 233$ y $D = 41$, también sabemos que $D$ esta decreciendo a una razón de 2 unidades por minutos y que $Q$ permanece sin cambios. ¿Que esta pasando con el gasto cardiaco? Calcular la razón de variación de $y$ en función de $Q$ y de $D$

   Ejercicio del libro: Calculo Una Variable (undécima edición) George B. Thomas, Jr

8. Se tiene un cubo de hielo de lado $s$, por tanto $V = s^3$ y su área superficial es de $A = 6s^2$. Suponga que se deja fuera del freezer y por tanto comienza a derretirse, suponga además que mientras se derrite conserva su forma cúbica.

   La razón a la que el volumen disminuye es proporcional al área superficial, es decir $\frac{dV}{dt} = -kA$, donde $K$ es una constante positiva. Hay otros factores que actúan en este ejemplo pero no los tendremos en cuenta.

   Si se sabe que el cubo pierde un cuarto de su volumen durante la primer hora y que el volumen es $V_0$ cuando $t = 0$. ¿Cuanto tardara el cubo de hielo en derretirse?

9. Una plataforma petrolífera se encuentra a $20km$ de la costa debe ser conectada a una refinería que esta a $32km$ en línea recta desde el punto mas cercano a la plataforma. Si instalar la tubería debajo del agua cuesta \$350 por cada kilometro y en tierra cuesta \$200 por kilometro.. ¿Que combinación de instalación subacuática y terrestre da la conexión mas barata?

10. Sobre la tos. Cuando tosemos, la tráquea se contrae para incrementar la velocidad del aire de salida, pero cuanto debe contraerse la traquea para que esta velocidad sea máxima. ¿Realmente se contrae la traquea cuando tosemos?

    Bajo hipótesis razonables acerca de la elasticidad de la pared de la traquea y respecto a como se frena el aire cerca de la pared por la fricción, la velocidad promedio del flujo de aire puede ser modelada por la ecuación

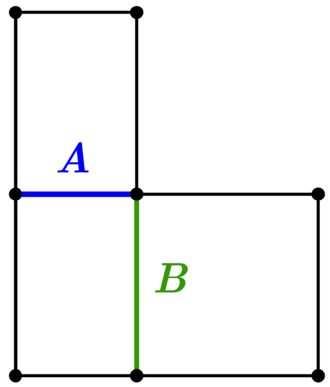
$$v(r) = c(r_0 - r)r^2, \quad \frac{r_0}{2} \leq r \leq r_0 \tag{2}$$

    donde $r_0$ es el radio de la traque en reposo, en cemtímetros, y $c$ es una constante positiva que depende en parte de la longitud de la traquea.

    *a*) Calcule el valor $r$, en función de $r_0$ donde se da el máximo. Las radiografías confirman que la traque realmente se contrae a valores cercanos a ese $r$ cuando tosemos.

    *b*) Tome $r_0 = 0{,}5$ y $c = 1$, y grafique $v(r)$ en el intervalo $[0; 0{,}5]$. Cual es el máximo de $v$ en ese intervalo?¿ En que punto o puntos se realiza?

11. Cual es la longitud en metros aproximada de la escalera mas larga que se puede transportar de forma horizontal alrededor de la esquina del corredor que se muestra en la figura con $A = 2m$, $B = 3m$.




Que ocurriría si $A = B = 3m$?

12. En este ejercicio estudiaremos algunos envases cilíndricos.

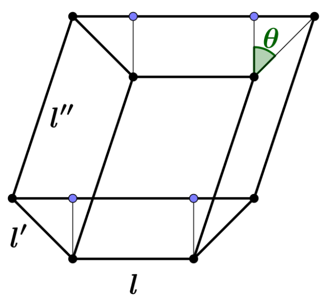
    - Cerveza 473 cm$^3$. Dimensiones aproximadas 6.5cm de diámetro, 14.5 cm de altura
    - Refresco 354 cm$^3$. Dimensiones aproximadas 6.5 cm de diámetro, 11 cm de altura.
    - Choclo. Dimensiones aproximadas 7.5 cm de diámetro, 8,5 cm de altura.

    *a*) Calcular la capacidad de la latas de choclos.

    *b*) Calcular las dimensiones óptimas, en cuanto a su superficie, de la lata de Cerveza. en diámetro y altura para que tenga la capacidad de 473 cm$^3$. Repetir lo mismo para la lata de Refresco y la de Choclo.

    *c*) ¿Cual esta, en proporción, mas cerca de la óptima? Realice hipótesis sobre los motivos de estos resultados.

13. Se desea construir un bebedero para caballos como en la figura. El gasto que quiere realizarse esta fijo, es decir $l$, $l'$ y $l''$. Maximizar la capacidad del bebedero en función de $\theta$.




## 3. Complementarios

1. Suponga que $P$ un polinomio de grado $n$ cumple que $P(x) \geq 0$.

    *a*) Verificar que $n$ es par

    *b*) Demuestre que $\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) \geq 0$ para todo $x$.

2. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $n$ veces derivable en $(a,b)$ y $f(x) = 0$ para $n+1$ puntos diferentes. Demostrar que existe $x \in (a,b)$ tal que $f^n(x) = 0$

3. Demostrar que si $f$ es una función dos veces diferenciable con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f'(0) = f'(1) = 0$, entonces $|f''| \geq 4$ para algún $x \in (0,1)$.

   Más aun, demuestre que o $f''(x) \geq 4$ par algún $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ o $f''(x) \leq -4$ par algún $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$