Práctico Semana 12

Se aceptarán como regla las siguiente derivadas

$$(\sin(x))' = \cos(x), \qquad (\cos(x))' = -\sin(x) \tag{1}$$

1. Cálculos elementales

1. Calcular, a partir de la definición, las derivadas de las siguientes funciones

   a) $f(x) = x^n$ *b*) $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *c*) $\frac{1}{x}$ *d*) $f(x) = \frac{1}{x^n}$ *e*) $f(x) = \sqrt{x}$ *f*) $\log(x)$

2. Determinar en que puntos es derivable la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. En caso de existencia calcular $f'(a)$.

3. Sea $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones donde I es un intervalo abierto tal que f y g son derivables en I
   a) Probar que la función $h : I \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x) + g(x)$ es derivable y $h'(x) = f'(x) + g'(x)$
   b) Probar que la función $h : I \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x)g(x)$ es derivable y $h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$
   c) Probar que si $f(x) \neq 0$ $\forall x \in I$ entonces la función $h : I \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ es derivable y $h'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$
   d) Suponga que $f(I) \subset I$. Probar que la función $h(x) = g \circ f(x)$ es derivable y que $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$
   e) 1) Probar que si f es invertible, $f(p) = q$ y $f'(p) \neq 0$, entonces la función $h = f^{-1}$ es invertible y ademas $h'(q) = \frac{1}{f'(p)}$
   2) Calcular $(e^x)'$
   3) De un ejemplo de una función f invertible y deribable pero que su inversa no sea derivable.
   f) Sea $h : I \to \mathbb{R}$ funcion cualquiera. Probar que si en a existen las derivadas laterales, esto es,

   $$\lim_{x \to a^-} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}, \quad \lim_{x \to a^+} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$$

   entonces h es continua en a.
   Probar que si las derivadas laterales son iguales entonces h es derivable en a

4. *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe $L = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h}$.
   1) Probar o refutar, a partir de la definición, que f es derivable en x_0.
   2) Suponiendo que f es derivable en x_0, ¿qué relación hay entre L y $f'(x_0)$?
   b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe $K = \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0 - h)}{h}$.
   1) Probar o refutar, a partir de la definición, que g es derivable en x_0.
   2) Suponiendo que g es derivable en x_0, ¿qué relación hay entre K y $g'(x_0)$?

5. Se estudian las siguientes variaciones de la definición de derivada.

   Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}$ la derivada de f en p existe y vale L si solo si

   a) (Definición de derivada) $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} = L$ *b*) $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{(x - p)^2} = L$

   c) $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{\sqrt{x - p}} = L$ *d*) $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(-x)}{2(x - p)} = L$ *e*) $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x) + f(-x)}{2(x - p)} = L$

   Determinar las implicancias entre ellas. Bosquejar la situación en cada ejemplo. Determinar para la siguiente lista de funciones determinar cuales verifican que definición tomando $p = 0$.

   i) $f(x) = x$
   ii) $f(x) = |x|$
   iii) $f(x) = x^3$
   iv) $f(x) = \sqrt{|x|}$
   v) $f(x) = \text{signo}(x)$

6. *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función impar, tal que $f'(4) = 5$. Probar que f debe ser derivable en -4 y calcular $f'(-4)$.
   En caso de ser derivable en 0, puede afrimar algo de $f'(0)$

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función par, tal que $f'(4) = 5$. Probar que f debe ser derivable en -4 y calcular $f'(-4)$.
   En caso de ser derivable en 0, puede afrimar algo de $f'(0)$

2. Cálculo de derivadas

1. Calcular la derivada de las siguientes funciones

   a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$ *b*) $\dfrac{ax + b}{cx + d}$ *c*) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^4 + x^2 + 1}$ *d*) $x\sqrt{1 + x^2}$ *e*) $\dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$ *f*) $\left(\sqrt[5]{x + 1}\right)^2$

   g) $\sin^3(x)$ *h*) $\sin\left(x^3\right)$ *i*) $\sin(\cos(x))$ *j*) $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *k*) $\sin\left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right)$ *l*) $\sin\left(\dfrac{\cos(x)}{x}\right)$

2. Calcular la derivada de las siguientes funciones

   a) $\left(\dfrac{1 + x^3}{1 - x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ *b*) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ *c*) $\log(\log(\log(x)))$ *d*) $\dfrac{1}{x - \frac{2}{x + \sin(x)}}$ *e*) $\dfrac{\sin(x^2 \sin^2(x))}{1 + \sin(x)}$

   f) $e^{\frac{x + \sqrt{x}}{\sin(x + \cos(x))}}$ *g*) $\sin\left(\dfrac{e^{\sqrt{x} + \sin(x)}}{\cos(x)}\right)$ *h*) $\log\left(\sin\left(\dfrac{e^{\sqrt{x}} + x}{e^x - \sqrt{x}}\right)\right)$ *i*) $\dfrac{\sqrt{\sin(x^2)}}{e^{\sqrt{x}} - \sin(\cos(\sqrt{x}))}$

   j) $\dfrac{\log\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{\sin\left(\log\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)\right)}$ *k*) $\log\left(\sin\left(\dfrac{1 + \cos(x)}{1 + \sin(x)}\right)\right)$ *l*) $\sin\left(\dfrac{x}{x - \log\left(\frac{x}{x - e^x}\right)}\right)$

3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones

$$a)\quad x - \sin(x)\cos(x) \qquad b)\quad x\log(x) - x \qquad c)\quad \tan(x)$$

4. **Polinomios**
   Sea $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio.

   a) Probar que
   $$P(x) = \left(\int_0^x P(t)\,dt \right)' + P(0)$$

   b) Probar que α es raíz multiple de P si solo si α es raíz de P y P'

5. Calclue $f' \circ f$ y $f \circ f'$ en cada caso

$$a)\quad f(x) = \frac{1}{x} \qquad b)\quad \sin(x) \qquad c)\quad f(x) = x^2 \qquad d)\quad f(x) = 17 \qquad e)\quad f(x) = 17x$$

6. Halle f' en función de g' para los siguientes ejemplos

$$a)\quad f(x) = g(x + g(a)) \qquad b)\quad f(x) = g(xg(a)) \qquad c)\quad f(x) = g(x + g(x))$$

$$d)\quad f(x) = g(x)(x - a) \qquad e)\quad f(x) = g(a)(x - a)$$

$$f)\quad \frac{f(x)}{g^2(x) + 1} \qquad g)\quad \sqrt{f(x)^2 + g(x)^2} \qquad h)\quad (f(x))^{g(x)},\ \text{Sugerencia: Recordar que } a^b = e^{b\log(a)}$$

$$i)\quad f(x+3) = g(x^3) \qquad j)\quad f(x^3) = g(x + g(x))$$

7. **Derivaciones**
   Dado $p \in \mathbb{R}$ sea $D_p : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ una transformación lineal no nula tal que
   $D_p(fg) = D_p(f)g(p) + f(p)D_p(g)$ (regla de Leibniz)

   a) Probar que $D_p(1) = 0$. Deducir que $D_p(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

   b) Probar que $D_p(x^2) = 2xD_p(x)$. Probar por inducción que $D_p(x^n) = nx^{n-1}D_p(x)$

8. **Derivada de Schwarz**
   Si f es tres veces derivable y $f' \neq 0$, la derivada de Schwarz de f en x se define mediante
   $$\mathcal{D}f(x) = \frac{f'''(x)}{f''(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

   a) Demuestre que
   $$\mathcal{D}(f \circ g) = [\mathcal{D}(f) \circ g](g')^2 + \mathcal{D}g$$

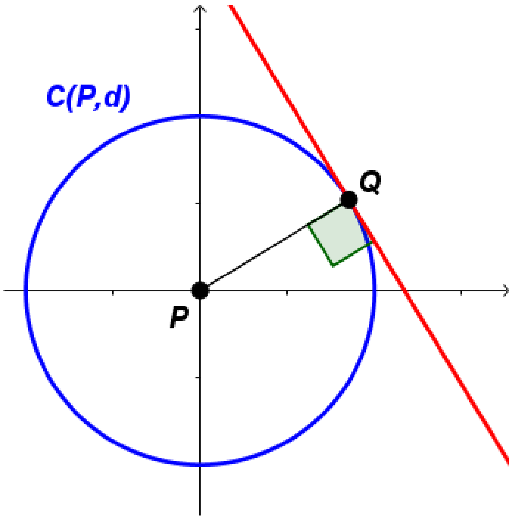
   b) Demuestre que si $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ con $ad - bc \neq 0$, entonces $\mathcal{D}f = 0$. Deducir que $\mathcal{D}(f \circ g) = \mathcal{D}g$.

3. Recta tangente

1. En cada uno de los siguientes casos, calcular y graficar la recta tangente de la función f en el punto p

   a) $f(x) = x^2$, $p = (3,9)$ *b*) $\cos(x)$, $p = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ *c*) $\frac{x}{x^2+1}$, $p = (0,0)$ *d*) $f(x) = \sqrt{9+x^2}$, $p = (4,5)$

2. Sea $\mathcal{C}(p,r)$ el circulo de centro p y radio r. Probar que para todo $q \in \mathcal{C}(p,r)$ se tiene que la recta tangente a $\mathcal{C}(p,r)$ por q es perpendicular a la recta por p y q. Sugerencia: estudiarlo primero para el caso de $\mathcal{C}(0,1)$.

   Sea $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $(-a,a)$. Probar que si $Im(f)$ no es el semi circulo, entonces existe $x_0 \in (-a,a)$ tal que la recta tangente a f por x_0 no es perpendicular a la recta por $(0,0)$ y $(x_0, f(x_0))$.

3. Calcular la recta tangente de las elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en un punto (u,v).

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable. Suponga que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que la recta tangente a f por a corta al grafico de f, en al menos otro punto mas, digamos b. Probar que existe $c \neq a$ tal que $f'(c) = f'(a)$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en 0, y $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la ecuación de la recta tangente por 0. Probar r es la mejor aproximación lineal a f en 0, eso es, dada otra ecuación lineal $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe un entorno de 0, el cual notamos I_0, donde para todo $x \in I_0$ se tiene que $| f(x) - r(x) | \leq | f(x) - q(x) |$. Probar que además la igualdad se da solo en 0.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable y $r(x) = ax + b$ su recta tangente por 0. Probar que para todo par $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda_1 < a < \lambda_2$ existe $\delta > 0$ para el cual se verifican las inecuaciones

$$\lambda_1 x + b \leq f(x) \leq \lambda_2 x + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 x + b \leq f(x) \leq \lambda_1 x + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}^-$$

4. Aplicaciones

1. Si un gas en un cilindro se mantiene a temperatura constante T, la presión P se relaciona con el volumen V mediante la fórmula $P = \dfrac{nRT}{V - nb} + \dfrac{an^2}{V^2}$ donde a, b, n, R son constantes. Calcule $\frac{dP}{dV}$

2. Suponga que en una carretera el límite de velocidad se especifica en cada punto. En otras palabras existe cierta función L tal que el limite de velocidad límite a x metros desde el inicio de la carretera es $L(x)$. Dos automóviles, A y B, se desplazan por dicha carretera; la posición del automóvil A en el tiempo t es $a(t)$, y la del automóvil B es $b(t)$.

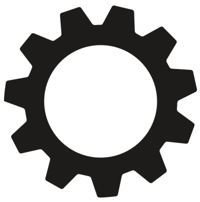
a) ¿Qué ecuación expresa el hecho de que el automóvil A siempre se desplaza a la velocidad límite? (La respues no es $a'(t) = L(t)$)

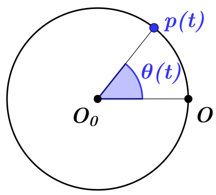
b) Suponga que A siempre se deplaza a la velocidad límite, y que la posición de B en el tiempo t es la posición de A en el tiempo $t-1$. Demuestre que B también se desplaza en todo momento a la velocidad límite.

c) Suponga, que por el contrario, que B siempre se mantiene a una distancia constante por detrás de A. ¿En que condiciones B se desplazará todavía en todo momento a la velocidad límite?

3. En este ejercicio se intentara definir la velocidad de los engranajes. Para un engranaje lo importante es cuanto gira, y no la velocidad puntal en cada lugar del mismo.

   Suponga por ejemplo que para el engranaje de la figura (figura de la izquierda) se sabe que el gira a una velocidad constante y que el engrange tarda 12 segundos en dar una vuelta entera, cuanto tarda un diente para avanzar al siguiente lugar?

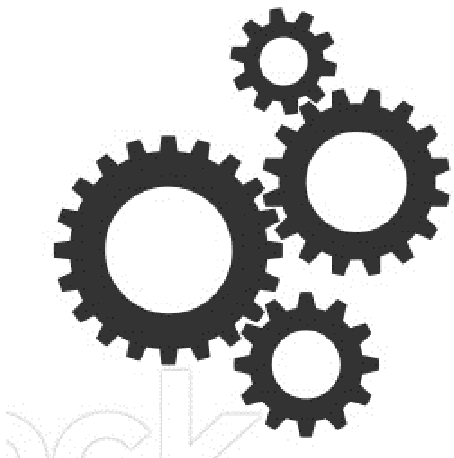




   Para definir la velocidad de un engranaje se marcan 2 puntos, O_0, el origen de la circunferencia, otro auxiliar O que servira para medir los ángulos. Estos dos puntos estan en el plano y se mantandran siempre en el mismo lugar. Se pinta un punto p en el engranaje (la circunferencia), este si se movera en función del tiempo, luego define una función $p(t)$. Por último definimos la función θ como $\theta(t)$ es el angulo que forman $O, O_0, p(t)$. Hay una pequeña ambiguedad en esta definición que pasaremos por alto.

   Definimos asi la velocidad del engranage como θ'

   Para la siguiente figura numeramos los engranages de forma descendente y notemos θ_i a una función de angulo para el engranaje i. Suponga que movemos voluntariamente el engrange 1. Determinar las velocidades θ_i' en relación a θ_1'



   Suponga ahora un engranaje mueve una cinta horizontal. Relacionar la velocidad del engranaje con al de la cinta, cuidado no solo depende de θ'.