Práctico Semana 11

1. Función inversa

1. Sea $f : I \to J = \mathrm{Im}(f)$ estrictamente creciente. Probar que $g = f^{-1} : J \to I$ es estrictamente creciente.
2. Dar una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biyectiva y no monótona.
3. Determinar en cada caso los intervalos maximales donde la función sea invertible.

   a) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = 2x + 5$ *b*) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = |2x + 5|$ *c*) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = -2x^3 + 3$

   d) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ *e*) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = |x^2 + x - 2|$

   f) $f : I \to \mathbb{R};\ f(x) = \sin(x)$ *g*) $f : I \to \mathbb{R};\ \cos(x)$ *h*) $f : I \to \mathbb{R};\ \tan(x)$

4. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Dar condiciones a f para que la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ sea inyectiva.
5. **Funciones** log **y** exp

   a) A partir de todas las propiedades vistas probar que $\log : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ es continua y biyectiva. Deducir que la función inversa $\exp = \log^{-1} : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ tambien es continua y biyectiva.

   b) Probar que $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Sugerencia: tomar x e y como imagen de la función log.

   c) Probar que $\exp(x) = e^x$ donde e es el único número que verifica $\log(e) = 1$.

6.

   a) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótonas crecientes. Probar que $f + g$, $f \circ g$, $\max\{f, g\}$. son monótonas.

   b) Verificar que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definia por $f(x) = x^{101} + x^5 + 7x^3 + 2x$ es biyectiva.

7. Verificar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   es continua y no es monótona en ningún intervalo de la forma $[0, a]$ con $a > 0$.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona y biyectiva. Probar que f es continua.

2. Continuidad uniforme

1. Determinar en cada caso si f es uniformemente continua en I:

   a) $f(x) = \lfloor x \rfloor \quad I = [0,1]$ *b*) $f(x) = \lfloor x \rfloor \quad I = (0,1)$

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad I = [1,2]$ *d*) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad I = [1,+\infty)$ *e*) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad I = (0,2)$

2. Estudiar continuidad uniforme de las siguiente funciones

$a)\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=ax+b \qquad b)\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=|x|$

$c)\quad f:(-a,a)\to\mathbb{R};\ f(x)=x^2 \qquad d)\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=x^2$

$e)\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=\sin(x) \qquad f)\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=\sin^2(x) \qquad g)\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=\sin(x^2)$

$h)\quad f:[-1,1]\to\mathbb{R};\ f(x)=\dfrac{x}{4-x^2} \qquad i)\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=\dfrac{1}{1+|x|} \qquad j)\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

$k)\quad f:[0,+\infty)\to\mathbb{R};\ f(x)=\sqrt{x} \qquad l)\quad f:(0,1)\to\mathbb{R};\ f(x)=\log(x) \qquad m)\quad f:[1,+\infty)\to\mathbb{R};\ f(x)=\log(x)$

3. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un polinomio. Probar que f es uniformemente continua si solo si $f(x)=ax+b$.

4. *a*) Sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función Lipschitz. Probar que f es uniformemente continua. De un ejemplo de una función uniformemente continua y no Lipschitz.

   b) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integrable y acotada. Probar que $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ es uniformemente continua.

5. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Probar que existen constantes a y b tales que $-(\lfloor|ax|\rfloor+b)\leq f(x)\leq\lfloor|ax|\rfloor+b$. Representar graficamente la situación.

6. Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas.

   a) Probar que $f+g$ es uniformemente continua.

   b) Discutir que ocurre para fg.

   c) Probar que $h_1=f(ax+b)$ y $h_2=af(x)+b$ son uniformemente continuas.

   d) Probar mas en general que $f\circ g$ es uniformemente continua.

7. Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función uniformemente continua.

   a) Probar que existen los límites $\lim_{x\to a^+}f(x)$ y $\lim_{x\to b^-}f(x)$, los llamaremos A y B respectibamente.

   b) Sea $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in(a,b)\\ A & \text{si } x=a\\ B & \text{si } x=b\end{cases}$$

   A una función de estas caracteristicas se le llama extensión, es decir g es una extensión de f. Esta notación se debe a que la funciones g y f coinciden en el dominio de f

   1) Probar que g es uniformemente continua

   2) Deducir que g tiene extremos absolutos en $[a,b]$

   c) Probar que la función f esta acotada

8. Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función continua. Probar que f es uniformenente continua si solo si existen y son finitos los limites

$$\lim_{x\to a^+}f(x) \qquad\qquad \lim_{x\to b^-}f(x)$$

3. Complementarios

1. Demuestre que no existe una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que la preimagen de cada punto tenga dos valores, es decir $\# f^{-1}(y) = 2$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

2. **Distancias**

   a) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y x un numero cualquiera. Demostrar que existe un punto en la gráfica de f que es entre todos, el mas próximo a $(x, 0)$; en otras palabras existe $c \in [a, b]$ tal que la distancia desde $(x, 0)$ a $(c, f(c))$ es menor igual a la distancia desde $(x, 0)$ a $(z, f(z))$ para todo $z \in [a, b]$.

   b) Demostrar que la afirmación es valida si se cambia $[a, b]$ por $\mathbb{R}$.