Práctico Semana 10

1. Propiedades generales de las funciones continuas

1. Sean a,b,c y d numeros reales tales que $a < b$ y $c < d$. Bosquejar, si es posible, funciones que cumplan.

   a) $f : (a,b) \to [c,d]$, $f((a,b)) = (c,d)$
   b) $f : (a,b) \to [c,d]$, $f((a,b)) = [c,d]$
   c) $f : (a,b) \to [c,d]$, $f((a,b)) = (c,d]$
   d) $f : [a,b] \to [c,d]$, $f([a,b]) = (c,d)$
   e) $f : [a,b] \to [c,d]$, $f([a,b]) = [c,d]$

2. **Puntos fijos**
   Dada una función f, un punto fijo de f es un valor c tal que $f(c) = c$. Notar que una función puede tener varios puntos fijos, uno solo o ninguno.

   a) Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Probar que f tiene al menos un punto fijo
   b) De un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y sin puntos fijos.
   c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y monótona decreciente. Probar que f tiene al menos un punto fijo.

3. **Existencia de soluciones**

   a) Demuestre que la ecuación dada $x + 2\cos(x) = 0$ tiene al menos una solución.
   b) En los siguientes casos, hallar un entero n para el cual existe x tal que $n \le x \le n+1$ y $f(x) = 0$:

   a) $x^3 - x + 3$ *b*) $x^5 + 5x^4 + 2x + 1$ *c*) $x^5 + x + 1$ *d*) $x + e^x$

   c) Demostrar que existe un número x tal que:

   a) $\sin(x) = x - 1$ *b*) $x^{117} + \dfrac{534}{1 + x^2 + \sin^2(x)} = 1212$ *c*) $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \sin^2} = 119$

   d) Examen, Julio 2015, parte del problema 3 Probar que la siguiente ecuación tiene una solucion en el intervalo (1,2):
   $$x\left(\frac{x^2}{2} - 1\right) - 5 = \log(x) - e^x$$

4. **Polinomios**

   a) Dado un polinomio P decimos que una raíz ha sido separada si se ha encontrado un intervalo $[a,b]$ que contiene esta raíz y ninguna otra. Separar las raíces reales de cada uno de los siguientes polinomios (todos tienen 4 raíces)

   a) $3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8$ *b*) $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$ *c*) $x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2$

   b) Todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz.

c) Mostrar que la paridad de la cantidad de raíces contadas con multiplicidad es igual a la paridad del grado del polinomio.

d) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio. Probar que existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $|f(y)| \leq |f(x)| : \forall x \in \mathbb{R}$.

e) Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\phi(x)}{x^n} = 0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\phi(x)}{x^n}$$

1) Probar que si n es impar, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^n + \phi(x) = 0$.

2) Probar que si n es par existe un número y tal que $y^n + \phi(y) \leq x^n + \phi(x) : \forall x \in \mathbb{R}$

5. *a*) Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ una funcion continua, tal que $x^2+(f(x))^2 = 1$. Demuestre que o bien $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ o bien $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$

b) ¿ Cuantas funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hay que satisfagan $(f(x))^2 = x^2$

c) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que f es continua y $f(x)$ es racional para todo x. ¿Que puede decirse acerca de f?

6. Primer parcial, primer semestre 2008, MO

Concidere la ecuación:

$$\log(x) + \frac{1}{x} - 2 = 0$$

y las siguientes afirmaciones

(I) Existe alguna solución de la ecuación en el intervalo $(0,1)$.

(II) Existe alguna solución de la ecuación en el intervalo $(1,e^3)$.

(III) Existe alguna solución de la ecuación en la semirecta $(e^3,+\infty)$.

Indicar la opción correcta

A) Solo la afirmación (I) es verdadera

B) Solo las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas

C) Solo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas

D) Solo la afirmación (III) es verdadera

E) Ninguna de las afirmaciones es correcta.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que existe un par $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f(a) < 0 < f(b)$. Sea A el conjunto definido por $A = \{y > a : f(z) < 0 : \forall z \in [a,y]\}$. Probar que A esta acotado, no tiene maximo y $\sup(A)$ es una raíz de f.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Probar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx$

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar o dar un contraejemplo para las siguientes afrimaciones

a) Si f esta acotada si solo si tiene máximo y mínimo.

b) Si f tiene máximo y mínimo entonces esta acotada

c) Si existen $a,b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, entonces f esta acotada.

d) Si f esta acotada entonces existen $a,b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

e) Si existen $a,b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, entonces f tiene máximo y mínimo.

f) Si existen $a,b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, entonces f tiene máximo o mínimo.

g) Si existe $a, \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a = \lim_{x\to-\infty} f(x)$, entonces f tiene máximo y mínimo.

h) Si existe $a, \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a = \lim_{x\to-\infty} f(x)$, entonces f tiene máximo o mínimo.

10. Decimos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica si existe $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

    a) Probar que la función $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ es periódica.

    b) Probar que si f es periódica y continua entonces tiene máximo y mínimo.

11. **Extremos absolutos**

    a) Primer parcial, primer semestre 2010. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

    $$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ a^2x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

    El valor de a que hace que f sea continua y no tenga tenga extremos absolutos es ...

    b) Primer parcial, primer semestre 2007.
    Sean las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

    $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \;\text{ y }\; \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

    Indicar la opción correcta.

    (A) f alcanza un máximo y g alcanza un mínimo.
    (B) f^2 alcanza un máximo y g alcanza un mínimo.
    (C) f esta acotada pero no alcanza ni mínimo ni máximo y g alcanza un mínimo.
    (D) f alcanza un mínimo y $-g$ esta acotada superiormente.
    (E) f^2 alcanza un mínimo y g^2 no esta acotada.

12. **Integreales**

    Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua e integrable (más adelante se vera que esta hipótesis es redundante).

    a) Segundo parcial, segundo semestre 2015, desarrollo.

    1. Demostrar que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c)(b-a) = \int_a^b f(t)\,dt$
    2. ¿El c de la parte anterior es único? Justificar su respuesta.
    3. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ no es continua ¿vale la conlcusión de la primera pàrte? Justificar su respuesta

    b) Examen, febrero 2015, MO

    Si f continua es tal que $\int_{-2}^{1} f(t)\,dt = 3$, entonces se cumple necesariamente que:

    (A) $f(\alpha) = 1$, $\forall \alpha \in [-2,1]$.
    (B) $f(\alpha) < 2$, $\forall \alpha \in [-2,1]$.
    (C) $\exists \alpha \in [-2,1]$ tal que $f(\alpha) = -3$.
    (D) $\exists \alpha \in [-2,1]$ tal que $f(\alpha) = 1$.
    (E) $f(\alpha) > \frac{1}{2}$, $\forall \alpha \in [-2,1]$.

    c) Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Probar que si $\max(F) = F(c)$ para algún $c \in (a,b)$ entonces $f(c) = 0$

13. Primer parcial, primer semestre 2007, MO

    Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se concideran los siguientes enunciados:

    Enunciado I: Si f es continua en todo punto $x \in \mathbb{R}$, entonces la imagen por f de cualquier intervalo cerrado y acotado es tambien un intervalo cerrado y acotado.

    Enunciado II: Si la imagen por f de cualquier intervalo cerrado y acotado es un intervalo cerrado y acotado entonces f es una función continua para todo $x \in \mathbb{R}$.

(A) Ambos enunciados son verdaderos.

(B) El Enunciado II es verdadero pero, el Enunciado I es falso, y un contraejemplo es la función f tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

(C) El Enunciado I es verdadero pero, el Enunciado II es falso, y un contraejemplo es la función f tal que $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

(D) El Enunciado I es verdadero pero, el Enunciado II es falso, y un contraejemplo es la función f tal que $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

(E) Ambos resultados falsos.

2. Aplicaciónes

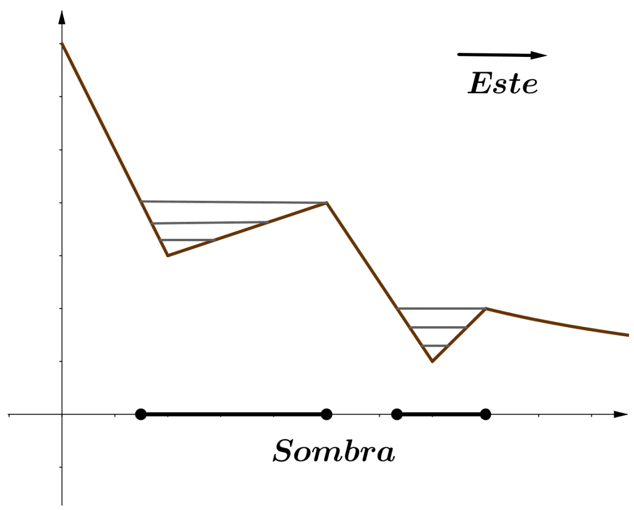
1. Sea F la función que le asgina a cada punto del planeta tierra su temperatura, asumamos que la tierra tiene forma esférica perfecta, y que la función F es continua.

   Discutir si la siguiente afirmación es verdadera: Existen dos puntos antipodales (diametralmente opuestos en la esfera) que tienen la misma temperatura. Repetir el estudio para la función G altura al nivel del mar.

2. Lema del Sol Naciente

   Suponga que tenemos una región montañosa como en la figura. Denominamos $f(x)$ a la altura de cada punto y donde la coordenada x crece hacia el este. Asuma que f es continua.

   En el momento del Alba, podemos suponer que los rayos de sol son horizontales, habra lugares con sombra y lugares sin sombra. Llamamos $S = \{x : \text{ en el punto } (x, F(x)) \text{ hay sombra}\}$



   a) Discutir que $x \in S$ si solo si $\exists y > x$ tal que $F(x) < F(y)$. Esta es la definición formal de S.

   b) Suponga que $(a, b) \subset S$ y $a \notin S$, $b \notin S$, en particular $f(a) \geq f(b)$.

      1) Suponga que $f(a) > f(b)$, demuestre que el máximo de f en $[a, b]$ es $f(a)$.

      2) Demuestre que esto lleva a una contradiccion por tanto $f(a) = f(b)$

   c) Sea p tal que existe un intervalo I para el cual $p \in I$ que cumple la siguiente propiedad, $\forall x \in I \;\; x \in S$ si solo si $x < p$. Mostrar que $F(p)$ es un pico, es decir un maximo relativo.

3. Opcionales

1. Segundo parcial, primer semestre 2016, desarrollo partes b y c

   Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) > 0$, $x \in [0,2]$ y $\int_0^2 f(t)\,dt = 6$

   b) Supongamos además que $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ una función integrable y acotada con máximo M y mínimo m. Probar que
   $$6m \leq \int_0^2 f(t)g(t)\,dt \leq 6M$$

   C) Deducir que $6 \leq \int_0^2 (3t^2 - 1)e^t\,dt \leq 6e^2$

Parte adicional: Deducir que $6 \leq \int_0^2 (3t^2 - 1)e^{t^2}\,dt \leq 6e^4$