Práctico Semana 9

1. Funciones continuas

1. Determinar para que $a, b \in \mathbb{R}$ la función f es continua

$$a)\quad f(x)=\begin{cases} x^2+3x+2 & \text{si } x\leq 1 \\ ax^2+bx+1 & \text{si } x>1 \end{cases} \qquad b)\quad f(x)=\begin{cases} ax^2+2x & \text{si } x\leq 2 \\ x^3-ax & \text{si } x>2 \end{cases}$$

$$c)\quad f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x<2 \\ ax^2-bx+3 & \text{si } 2\leq x<3 \\ 2x-a+b & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$$

$$d)\quad f(x)=\begin{cases} \log(x+1) & \text{si } x>0 \\ (x+a)^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases} \qquad e)\quad f(x)=\begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x<1 \\ ax+b & \text{si } 1\leq x\leq 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases} \qquad f)\quad f(x)=\begin{cases} a\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ \sin(x+b) & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

g) Primer parcial, segundo semestre 2014, MO

$$f(x)=\begin{cases} 2\cos(x) & \text{si } x\leq \pi \\ ax^2+b & \text{si } x>\pi \end{cases}$$

2. De ejemplos de funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que sean discontinuas en los siguientes conjuntos

$$a)\quad \emptyset \qquad b)\quad \{0\} \qquad c)\quad \mathbb{Z} \qquad d)\quad \{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\} \qquad e)\quad \left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\}$$

f) Piense sobre si una función puede ser discontinua en todo punto.

3. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función tal que $f(x)=-f(-x)$ para todo $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Probar que si f es continua entonces $f(0)=0$.

4. Sean $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones continuas.
Probar que las funciones $h_1, h_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $h_1(x)=\text{máx}\{f(x), g(x)\}$ y $h_2(x)=\text{mín}\{f(x), g(x)\}$ son continuas.

5. **Funciones de Lipschitz** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una funcion de Lipchitz

   a) Probar que f es continua. Deducir que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función integrable entonces $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ es continua.

   b) Probar que
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n}=0, \forall n>1$$
Deducir que si P es un polinomio y es una función de Lipschitz, entonces $P(x)=ax+b$.

6. Sean f y g funciones reales y sea $c\in\mathbb{R}$.

   a) Examen, mayo 2017, problema 1 parte b .
   Demostrar que si f es discontinua en c y g es continua en c entonces $f+g$ es discontinua en c.

b) ¿Qué pasa si ambas funciones son discontinuas en c?

c) ¿Qué se puede afirmar con respecto al producto de las funciones?

d) Supongamos ahora que $f(x) = x^2$ y $g(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x > 0 \\ |4-x| & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Estudiar la continuidad en 0 de f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$.

e) Definir f y g para que f sea discontinua en c, g sea discontinua en $f(c)$ y $g \circ f$ sea continua en c.

7. **Extensión de funciones**

Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ una extension de f es una función $g : J \to \mathbb{R}$ tal que $I \subset J$ y $f(x) = g(x), \forall x \in I$

a) Determinar los dominios maximales de las siguientes expresiones y si se pueden extender a $\mathbb{R}$ de forma continua.

$$a)\ \frac{1}{x} \qquad b)\ e^{\frac{1}{x}} \qquad c)\ e^{\frac{-1}{x^2}} \qquad d)\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad e)\ x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad f)\ \frac{1}{\sin(x)}$$

b) Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es una función continua, monotona y acotada. Probar que existe $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua que es una extensión de f.

8. Sean C_1 el círculo de ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y C_2 el círculo de centro $(0,0)$ y radio r. Notamos P el punto $(0,r)$ (punto superior de C_2) y Q el punto superior de la intersección entre C_1 y C_2. Finalmente definimos R el punto de intersección de la recta PQ y el eje x. Notar que el punto R es una función del radio de C_2, es decir r.

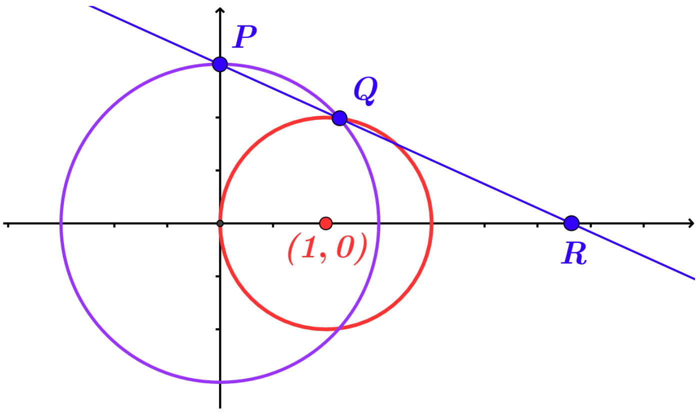


Figura 1: representación geométrica del problema

¿Qué ocurre con R cuando $r \to 0^+$?

1.1. Indeterminaciones

1. A partir de la definición de la función log

- Calcular las indeterminaciones de logaritmo

$$a)\ \lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} \qquad b)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x)}{x^a} : a \geq 1 \qquad c)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{x} : a \geq 1$$

$$d)\ \lim_{x\to 1} \frac{\log(x^2)}{x-1} \qquad e)\ \lim_{x\to 1} \frac{\log(x)^2}{x-1}$$

- Determinar ahora las siguientes indeterminaciones de la inversa de la función log

$$f)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} \qquad g)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(x)}{x}$$

2. **Teorema fundamental versión 0.1**

   Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función monotona y por tanto integrable. Dado $a\in\mathbb{R}$ definimos $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

   Probar que el límite $\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$ existe si f es continua en x_0, más aun, se tiene la igualdad

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$$

2. Aplicaciones

1. Sea $N(P)$ la cantidad de calculadoras que puede vender una compania manufacturera a un precio P.

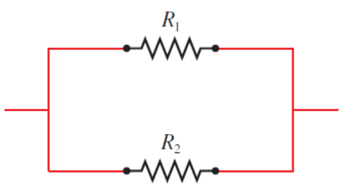
   Determinar el maximo dominio posible para la función P

   Si la función $N(p)=\frac{500}{P^2}$, calcular el $lim_{p\to 0^+}N(P)$. Interpretar este resultado.

2. **Circuitos electricos**

   a) La ley de Ohm para circuitos electricos como el que se muestra en la figura siguiente, establece que $V=RI$. En la ecuación, V es una constante de voltaje, en volts, I es la corriente, en amperes, y R es la resistencia, en ohms. A la empresa en donde trabaja le han pedido que sustituya las resistencias por un circuito en donde V sea de 120 voltios, e I sea de $5\pm 0{,}1$ amperes¿En que intervalo deben contrarse R para que I esté a menos de 0,1 amperes del valor $I_0=5$?

   b) Si dos resistencias eléctricas con resistencias R_1 y R_2 respectivamente, se conectan en paralelo, entonces la resistencia total R esta dada por $R=\dfrac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$.



   Suponga que se fija la resistencia R_2 con $R_2=10$ ohms, calcule la función $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ donde $f(x)=$ la resistencia de tomar $R_1=x$ ohms.

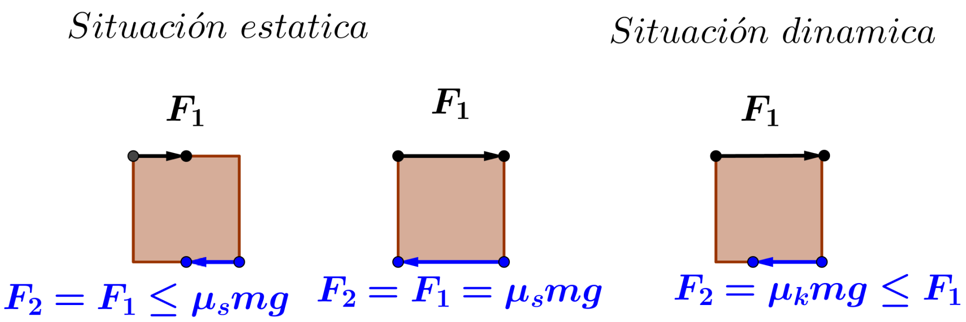
   Calcule $\lim_{x\to 0^+}f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty}f(x)$. Interprete estos resultados.

3. Tenemos una caja de madera de masa m apoyada en el suelo, tambien de madera, en reposo. Empezamos a aplicarle una fuerza, digamos $F_1(t)=tN$ (una cantidad de t Newton en el instante t). Al principio la caja no se movera, esto es debido a la fuerza de rozamiento que ejerce el suelo sobre la caja, contraresta

la nuestra, obteniendo así que al fuerza neta sobre la caja sea 0. A la fuerza de fricción que el piso ejerce sobre la caja cuando esta esta en reposo se le llama fuerza de rozamiento estatica

Cuando se sobrepasa un valor critico $\mu_s mg$ la caja empieza a moverse, y la fuerza de rozamiento pasa a ser dinamica $\mu_k mg$

En este caso $\mu_s = 0{,}7$ y $\mu_k = 0{,}4$, estas constantes estan determinadas por el material de las superficies.



a) Bosquejar la función $F_1(t)$, la fuerza que ejercemos sobre la caja, y determinar en que puntos es continua.

b) Bosquejar la función $F_2(t)$ la fuerza que ejerce el suelo sobre la caja. En que puntos F_2 es continua.

c) Bosquejar $F(t)$ la fuerza resultante sobre la caja y determinar en que puntos es continua.

d) Definimos la función $x(t)$ la función posicion de la caja en función del tiempo. Discutir sobre como podría ser el bosquejo del desplazamiento de la caja. En que puntos esta función seria continua.

3. Complementarios

1. En este ejercicio no se busca formalidad alguna, solo interpretar geometricamente el problema.

   a) Sea $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ el círculo unitario. Formule una definición de continuidad para funciones $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$.

   b) Discutir si la funcion $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{S}^1$ definida por $f(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ es continua.

   c) Verificar que f es biyectiva. Discutir si f^{-1} es continua.

2. Determinar en que puntos es continua la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por la expresión

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ irracional} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible} \end{cases}$$