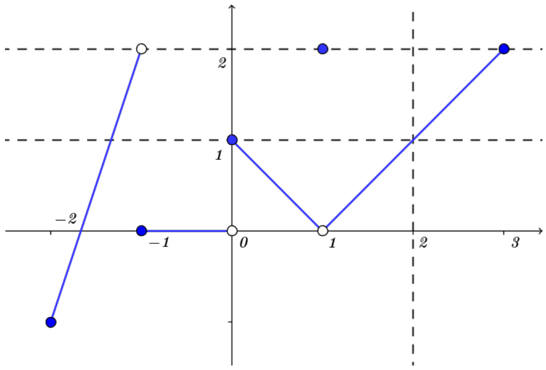
Práctico Semana 8

1. Definición y propiedades básicas de límite

1. Determine los límites que se piden para la función $g(x)$ cuya gráfica se muestra a continuación o explique por que no existen

$a)$ $\lim_{x\to -1} g(x)$ $b)$ $\lim_{x\to 0} g(x)$ $c)$ $\lim_{x\to 1} g(x)$ $d)$ $\lim_{x\to 2} g(x)$



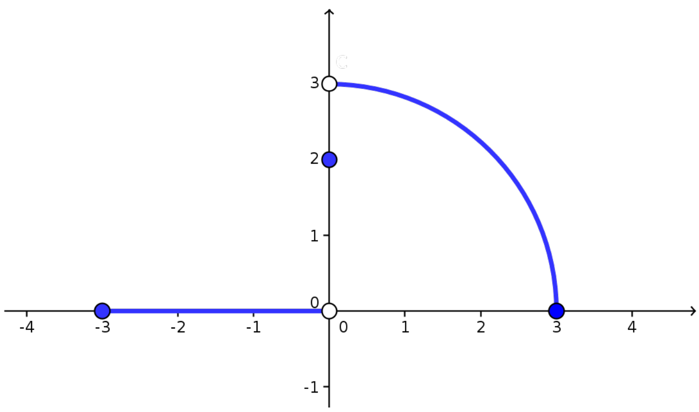
Calular

$e)$ $g(-2)$ $f)$ $g(-1)$ $g)$ $g(0)$ $h)$ $g(1)$ $i)$ $g(2)$ $j)$ $g(3)$

¿Puede calcular los valores $k)$ $g(-1{,}1)$ $l)$ $g(0{,}5)$ $m)$ $g(1{,}2)$ $n)$ $g(2{,}5)$?

2. A partir de la función cuya gráfica se muestra aqui explique por que

$a)$ $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$ $b)$ $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 2$ $c)$ $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 3$



3. Encontrar $L \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo x que cumple $0 < |x - a| < \delta$, para los valores $\epsilon = 10^{-2}, 10^{-5}, 10^{-10}$.

   a) $f(x) = x^4$, $a \in \mathbb{R}$ *b*) $f(x) = x^2 + 5x - 2$, $a = 2$ *c*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$ *d*) $f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x}$, $a = 1$

   e) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$ *f*) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $a = 0$ *g*) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $a = 0$

   h) $f(x) = x[3 - \cos(x^2)]$, $a = 0$ *i*) $f(x) = \dfrac{x}{2 - \sin^2(x)}$, $a = 0$ *j*) $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $a = 0$

4. Se estudian las siguientes variaciones de la definición de límite.

   Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}$, el límite de f cuando x tiende a p es L si:

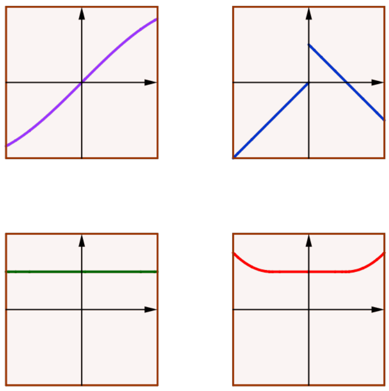
   a) (Definición de límite)
   $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$: tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$

   b) $\exists \epsilon > 0, \exists \delta > 0$: tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$

   c) $\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0$: tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$

   d) $\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0$: tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$

   Determinar las implicancias entre ellas. Determinar para los gráficos de la imagen cuales verifican que variante de definición cumplen tomando $p = 0$.

   Estudie que ocurre cuando cambia alguna de las desigualdades estricta por la desigualdad general (cambiar $>$ por $\leq$ y $<$ por $\geq$).

5. Primer parcial, segundo semestre 2012, MO

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ para todo $x \neq 1$ y $f(1) = 0$. Sea $B^*(1, \delta) = \{x : 0 < |x - 1| < \delta\}$. Se realizan las siguientes afirmaciones:

   (I) Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existen $x_1, x_2 \in B^*(a, \delta)$ con $|f(x_1) - f(x_2)| > \epsilon$.

   (II) Dado $\epsilon > 0$ cualquiera existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B^*(1, \delta)$ entonces $|f(x) - 1| < \epsilon$.

   (III) Cualquiera sea $\epsilon > 0$, no es posible hallar $\delta > 0$ tal que si $|x - x'| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x')| < \epsilon$

   Entonces:

   (A) Solamente la afirmacion (I) es verdadera.

   (B) Solamente la afirmacion (II) es verdadera.

(C) Solamente las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.

(D) Solamente la afirmacion (IV) es verdadera.

(E) Solamente las afirmaciones (IV) y (II) son verdaderas.

6. Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones donde I es un intervalo abierto y $p \in I$ tal que $\lim_{x\to p} f(x) = a$ y $\lim_{x\to p} g(x) = b$.

   a) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la $\lim_{x\to p} \lambda + f(x) = \lambda + a$.

   b) Examen mayo 2017, Problema 1, parte 1.a
   Probar que la función $h(x) = f(x) + g(x)$ tiene límite en p y $\lim_{x\to p} h(x) = a + b$.

   c) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la función $\tilde{f}(x) = \lambda f(x)$ verifica que $\lim_{x\to p} \tilde{f}(x) = \lambda a$.

   d) Probar que la función $h(x) = f(x)g(x)$ verifica que $\lim_{x\to p} h(x) = ab$.

   e) Probar que si $b \neq 0$ entonces la función $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ cumple que $\lim_{x\to p} h(x) = \dfrac{a}{b}$.

   f) Supongamos que $\lim_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Sea $h(x)$ una función real, probar que existe el $\lim_{x\to p} \dfrac{h(x)}{g(x)}$ si solo si existe el límite $\lim_{x\to p} \dfrac{h(x)}{f(x)}$, más aun $\lim_{x\to p} \dfrac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p} \dfrac{h(x)}{f(x)}$.

   g) Sea $h(x)$ una función acotada y suponga que $a = 0$, probar que la función $r(x) = f(x)h(x)$ cumple que $\lim_{x\to a} r(x) = 0$.

   h) Suponga que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I$. Probar que $a \leq b$. Dar un ejemplo de funciones $f(x) < g(x)$ $\forall x \neq p$ y con $a = b$.

   i) Suponga que $a = b$ y que $\forall x \in I \quad f(x) \leq g(x)$. Probar que si $h(x)$ verifica $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ entonces $\lim_{x\to p} h(x) = a$.

   j) Suponga que $a = p$ y sea $h(x) = g(f(x))$ probar o dar un contraejemplo de la afirmación: Existe el límite de h en p y $\lim_{x\to p} h(x) = b$.

7. Asumiendo que existe, calcular para los siguientes ejemplos $\lim_{x\to a} f(x)$

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$, $a = 2$ *b*) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, $a = -2$ *c*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$, $a = 0$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{f(x^2) - 1}{x} = 1$, $a = 4$ *e*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x^3) - 3f(x)}{x^3 - 3x} = 1, a = 1$ *f*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = 1$, $a = 0$

   g) $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)^2 + f(x) + 1 = 7$, $a = 2$ *h*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2f(x) - 1}}{f(x)} = 1$, $a = 0$ *i*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2f(x) - x}}{f(x)} = 1$, $a = 1$

2. Cálculo de límites y continuidad

1. Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ *b*) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \sqrt{x - 1} + 1$ *c*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \log(x)$ *d*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin(x) + \cos(x)$

   e) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 4}$ *f*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ *g*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4 - 2x^3}{x^3 - x^2}$ *h*) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ *i*) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{|x - 3|}{x - 3}$

   j) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 2}}$ *k*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x}$ *l*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ *m*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$ *n*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - x}{x - 1}$

2. Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} x^2 - x^3 \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{1+x} \qquad c)\ \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} \qquad d)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil}$$

$$e)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} \qquad f)\ \lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2+1} \qquad g)\ \lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2+x}$$

$$h)\ \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad i)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{[x]}$$

$$j)\ \lim_{x\to+\infty} x - [x] \qquad k)\ \lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad l)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{2^x} : m \in \mathbb{R}^+$$

3. Determinar en qué puntos son continuas las siguientes funciones:
   - *a*) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x).
   - *b*) $f(x) = \lfloor \frac{1}{x} (\rfloor$.
   - *c*) $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.
   - *d*) $f(x) =$ el primer número del desarrollo decimal de x.
   - *e*) $f(x) =$ el número de sietes del desarrollo decimal de x si este número es finito y cero en el caso contrario.
   - *f*) Examen mayo 2017, Problema 1, parte 2.b Determinar en que puntos son continuas las funciones del ejercicio 3, sección funciones, práctico semana 2 . Justificar

4. Determinar la existencia y calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$ en los siguientes casos

$$a)\ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es raccional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases} \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

5. Primer parcial, primer semestre 2011, Problema 7 parte d.

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   Probar que f no es continua en 0.

6.
   - *a*) Examen mayo 2017, Problema 1, parte 1.b

     Probar que si f es continua en el punto a y g no es continua en el punto a, entonces $f+g$ no es continua en el punto a.
   - *b*) Primer parcial, primer semestre 2014, MO

     Para toda pareja de funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se consideran las siguientes afrimaciones:

     (I) Si f es discontinua en c y g es continua en c, entonces $f+g$ es discuntinua en c

     (II) Si f es discontinua en c y g es continua en c, entonces fg es continua en c

     (III) Si f es discontinua en c y g es discontinua en $f(c)$, entonces $g \circ f$ es discontinua en c

     Indicar la opcion correcta:

     (A) Solo las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.

     (B) Ninguna de las afirmaciones es verdadera

     (C) Solo la afirmación (I) es verdadera

     (D) Solo las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.

     (E) Solo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.

7. Primer parcial, primer semestre 2010, ejercicio 7 partes a) y b)

   Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n-1}, \text{ para } n \geq 2 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   a) Bosquejar el grafico de f y deducir que $0 < f(x) < x$, $\forall x \in (0,1]$.
   b) Probar que f es continua en $x = 0$

8. Primer parcial, primer semestre 2012, ejercicio 2.a y 2.b

   a) Si f es una función que satisface $|f(x)| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, demostrar que f es continua en cero.
   b) Si g es una función continua en 0 y $|f(x)| \leq |g(x)|$, demostrar que f es continua en cero.

9. **Funciones monotonas**

   Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monotona creciente y $a \in \mathbb{R}$.

   a) Probar que dado $d > 0$ el conjunto $C_d = \{f(x) : 0 < x - a \leq d\}$ esta acotado.
   b) Verificar que si $d_1 < d_2$ entonces $C_{d_1} \subset C_{d_2}$, en particular $\inf(C_{d_1}) \geq \inf(C_{d_2})$ y $\sup(C_{d_1}) \leq \sup(C_{d_2})$
   c) Probar que $\sup(C_{d_i}) = f(a + d_i)$ y $\inf(C_{d_1}) = \inf(C_{d_2}) \geq f(a)$.
   d) Verificar que dado $\epsilon > 0$ existen $y_\epsilon \in C_d$ y $x_\epsilon > a$ tal que $y_\epsilon - \inf(C_d) = |y_\epsilon - \inf(C_d)| \leq \epsilon$ y $f(x_\epsilon) = y_\epsilon$. Sea $\delta = x_\epsilon - a > 0$, probar que para todo $x \in C_\delta$ se tiene que $f(x) - \inf(C_x) = |f(x) - \inf(C_x)| \leq \epsilon$.
   e) Deducir que existe el limite $\lim_{x \to a^+} f(x)$. Mostrar de forma analoga que existe el limite $\lim_{x \to a^-} f(x)$.
   f) Dar un ejemplo de una función monotona tal que no existe el limite $\lim_{x \to 0} f(x)$.

10. **Polinomios**

    Sean $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos polinomios, definidos por $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ y $Q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ con $a_n \neq 0 \neq b_m$ Probar que:

    a)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \text{ si solo si } n < m$$

    b)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m} \text{ si solo si } n = m$$

    c)
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \text{signo}(a_n b_m)\infty \text{ si solo si } n > m$$

    d) Suponga que $a \in \mathbb{R}$ es raíz de P y Q. Se tiene así que $P(x) = P_1(x)(x-a)^{n_1}$ y $Q(x) = Q_1(x)(x-a)^{m_1}$, donde $P_1(a) \neq 0 \neq Q_1(a)$, por lo tanto la multiplicidad de a como raíz de P y Q es n_1 y m_1 respectivamente. Probar que:

    1)
$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \text{ si solo si } n_1 > m_1$$

    2)
$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(a)}{Q_1(a)} \text{ si solo si } n_1 = m_1$$

    3)
$$\lim_{x \to a^+} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty \text{ o } -\infty \text{ si solo si } n_1 < m_1$$