Práctico Semana 7

1. Cambio de variable lineal

1. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable y $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Probar que:

   a) Para todo $p \in \mathbb{R}$ se cumple que
   $$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a+p}^{b+p} f(t-p)\,dt$$

   b) Para todo $r \in \mathbb{R}^+$ se cumple que
   $$r\int_a^b f(t)\,dt = \int_{ar}^{br} f\left(\frac{p}{r}\right)dt$$

   c) Deducir que para todo $p \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{R}^+$ se cumple que
   $$r\int_a^b f(t)\,dt = \int_{ra+p}^{rb+p} f\left(\frac{t-p}{r}\right)dt \qquad \text{y} \qquad r\int_a^b f(t)\,dt = \int_{r(a+p)}^{r(b+p)} f\left(\frac{t}{r}-p\right)dt$$

   d) Probar que
   $$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(b+a-t)$$

   De la igualdad anterior verificar que $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ para todo par $n, m \in \mathbb{N}$. Calcular con a partir de la fórmula de $\int_0^1 x^k\,dx$ la integral $\int_0^1 x^2(1-x)^{30}\,dx$.

2. Calcular la integral $\int_0^b x^n\,dx$ en función de b y $\int_0^1 x^n\,dx$.

   Deducir la fórmula general $\int_a^b x^n\,dx$ en función de a, b y $\int_0^1 x^n\,dx$.

3. **Definición y propiedades de la función logaritmo**
   Definimos la función logaritmo como
   $$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

   a) Probar que la función $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es creciente. Concluir que su única raíz es 1

   b) Probar la desigualdad $\log(n(a-1)+1) \le n\log(a)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\forall a \ge 1$.

   c) Probar que $\log(a) = \int_x^{ax} \frac{1}{t}\,dt, \ \ \forall a, x \in \mathbb{R}^+$.
   Probar que
   $$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

   d) A partir de la igualdad anterior probar que:

   1) $\log\left(x^2\right) = 2\log(x)$
   2) $\log(x) = 2\log\left(\sqrt{x}\right)$
   3) $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$

4) Mas en general probar por inducción que:

$$\log(x^n) = n\log(x) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

5) Completar la prueba para el caso racional, es decir:

$$\log\left(x^{\frac{n}{m}}\right) = \frac{n}{m}\log(x) \text{ para todo } n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$$

e) A partir de la igualdad $\log(x^n) = n\log(x)$ deducir que la función log no esta acotada

4. **Círculos y elípses**

   a) Apartir de una cambio de variable lineal calcular el área de un círculo de radio r en función del área de un círculo de radio 1.

   b) Apartir de un cambio de variable lineal calcular el área de la elípse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en función del área de un círculo de radio 1.

2. Cálculo de integrales

1. Sea $f : [2,8] \to \mathbb{R}$ integrable tal que $\int_2^8 f(x)\,dx = 20$ y $\int_8^4 f(x)\,dx = 12$.

   a) Calcular $\int_2^4 f(x)\,dx$

   b) Probar que existen $c, d \in [2,4]$ tal que $f(c) \geq 15$ y $f(d) \leq 17$.

2. Suponga que f y g son dos funciones integrables y que

$$\int_1^2 f(x)\,dx = -4, \qquad \int_1^5 f(x)\,dx = 6, \qquad \int_1^5 g(x)\,dx = 8$$

   Calcular:

$$a)\ \int_2^2 g(x)\,dx \qquad b)\ \int_5^1 g(x)\,dx \qquad c)\ \int_1^2 3f(x)\,dx$$

$$d)\ \int_2^5 f(x)\,dx \qquad e)\ \int_1^5 (f(x)-g(x))\,dx \qquad f)\ \int_1^5 (4f(x)-g(x))\,dx$$

3. Calcular las siguientes integrales

$$a)\ \int_0^{4,5} \lfloor x \rfloor\,dx \qquad b)\ \int_{-1}^{10} x - \lfloor x \rfloor\,dx \qquad c)\ \int_1^4 \lceil x \rceil\,dx \qquad d)\ \int_1^{10} x - \frac{\lfloor 2x \rfloor}{2}\,dx$$

$$e)\ \int_{-2}^2 |x|\,dx \qquad f)\ \int_{-2}^2 \lfloor x \rfloor\,dx \qquad g)\ \int_{-2}^2 \lfloor |x| \rfloor\,dx \qquad h)\ \int_{-2}^2 |\lfloor x \rfloor|\,dx$$

4. Calcular las siguientes integrales

$$a)\ \int_1^5 \lfloor x \rfloor^2\,dx \qquad b)\ \int_1^5 \lfloor x^2 \rfloor\,dx \qquad c)\ \int_1^3 \left\lfloor x^2 + x \right\rfloor dx \qquad d)\ \int_1^9 \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor dx \qquad e)\ \int_1^4 \sqrt{\lfloor x \rfloor}\,dx$$

$$f)\ \int_1^{100} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor dx \qquad g)\ \int_1^5 \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\,dx \qquad h)\ \int_1^5 \frac{1}{\lfloor x \rfloor^2}\,dx \qquad i)\ \int_1^5 \frac{2}{\lfloor 2x \rfloor^2}\,dx \qquad j)\ \int_1^5 \frac{4}{\lfloor 4x \rfloor^2}\,dx$$

$$k)\ \int_0^4 \sin(\pi\lfloor x \rfloor)\,dx \qquad l)\ \int_0^6 \sin\left(\frac{\pi\lfloor x \rfloor}{6}\right) dx \qquad m)\ \int_0^4 2^{\lfloor x \rfloor}\,dx$$

5. A partir de lo visto en clase sobre las integrales de los polinomios, calcular:

$$a)\ \int_0^3 x^2\,dx \qquad b)\ \int_0^1 5t^4\,dt \qquad c)\ \int_0^4 \frac{x^3}{4}\,dx \qquad d)\ \int_{-100}^{100} \frac{20x^{51}}{31}\,dx$$

$$e)\ \int_0^2 x^2+x \qquad f)\ \int_{-1}^3 x^2-x+1\,dx \qquad g)\ \int_{-1}^2 3x^2-2x+1\,dx \qquad h)\ \int_1^3 x^5+\frac{2x^3}{3}-x\,dx$$

$$i)\ \int_0^2 x(x+1)\,dx \qquad j)\ \int_{-1}^4 (t+1)(t-2)\,dt \qquad k)\ \int_{-1}^1 (x+1)(x+2)\,dx \qquad l)\ \int_{-1}^1 x^{41}(x-1)(x+1)\,dx$$

6. Calcular las integrales

$$a)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}} (2x+1)^2 \qquad b)\ \int_{-1}^5 (x+1)^5\,dx \qquad c)\ \int_1^5 (2x+3)^{10}\,dx \qquad d)\ \int_1^9 (x-1)^{100}\,dx$$

$$e)\ \int_2^5 \frac{1}{2x}\,dx \qquad f)\ \int_1^5 \frac{1}{x+1}\,dx \qquad g)\ \int_2^3 \frac{1}{2x+3}\,dx \qquad h)\ \int_1^4 \frac{1}{3x-2}\,dx$$

7.
   a) Apartir de la igualdad $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$ calcular $\int_2^5 \frac{1}{1-x^2}\,dx$.
   b) Probar que dados $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_1 < \mu_2$, entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

   $$\frac{1}{(x-\mu_1)(x-\mu_2)} = \frac{\alpha}{x-\mu_1} + \frac{\beta}{x-\mu_2}$$

   Calcular

   $$\int_{\mu_2+1}^{\mu_2+5} \frac{1}{(x-\mu_1)(x-\mu_2)}\,dx$$

   c) Calcular

   $$\int_3^4 \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$$

   d) Probar que dados $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_1 < \mu_2$, entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

   $$\frac{x}{(x-\mu_1)(x-\mu_2)} = \frac{\alpha}{x-\mu_1} + \frac{\beta}{x-\mu_2}$$

   Calcular

   $$\int_{\mu_2+1}^{\mu_2+5} \frac{x}{(x-\mu_1)(x-\mu_2)}\,dx$$

   e) Calcular

   $$\int_3^5 \frac{x+5}{x^2+3x+2}\,dx$$

8. A partir del ejercicio 10 de la sección 1 del practico 6 calcular

$$a)\ \int_3^4 \sqrt{3x}\,dx \qquad b)\ \int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx \qquad c)\ \int_5^7 \sqrt{x-3}\,dx \qquad d)\ \int_3^5 \sqrt{2x-1}\,dx$$

9. A partir del ejercicio 10 de la sección 1 del practico 6 calcular

$$\int_a^b \sqrt[n]{x}\,dx$$

3. Complementarios

1. Realice una lista con los tipos de funciones que sabe integrar. Compare con sus compañeros.

2. *a*) Calcular las siguientes integrales

$$a)\quad \int_0^{2\pi} \sin(kt) + 5\,dt,\ k \in \mathbb{N} \qquad b)\quad \int_0^{2\pi} \cos(kt) + 5\,dt,\ k \in \mathbb{N}$$

   b) Determinar el signo de las siguientes integrales

$$a)\quad \int_0^{2} \sin\left(x^2\pi\right)dx \qquad b)\quad \int_{-1}^{1} \cos\left(x^2\pi\right)dx$$

3. **Inversa de la función logaritmo**

   En este ejercicio se mostrara que existe un $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $f_a(x) = a^x$ es la inversa de $\log(x)$. Notemos así en este ejercicio $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a la función $f_a(x) = a^x$ definida en el práctico 4, sección: Funciones reales, ejercicio 6.

   a) Mostrar que si $\log(a) = 1$ se tiene que $\log\left(a^{\frac{n}{m}}\right) = \frac{n}{m}$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$. Es decir la función $f_a|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ verifica $\log \circ f_a|_{\mathbb{Q}} = id$.

   b) Mostrar que la función $\log \circ f_a$ es estrictamente creciente.

   c) Sean A_x y B_x los conjuntos definidos por $A_x = \left\{\log\left(a^{\frac{n}{m}}\right) : n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0 \text{ y } \frac{n}{m} < x\right\}$ y
   $B_x = \left\{\log\left(a^{\frac{n}{m}}\right) : n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0 \text{ y } \frac{n}{m} > x\right\}$.
   Probar que $\alpha < \log(x)$ para todo $\alpha \in A_x$, y $\beta > \log(x)$ para todo $\beta \in B_x$.
   Concluir que $\sup(A_x) \leq \log(a^x) \leq \inf(B_x)$ y por tanto $\log(a^x) = x\log(a)$. En particular si $\log(a) = 1$, tenemos que $\log \circ f_a = \mathrm{Id}$.

   d) Probar que $\log(4) > 1$. Deducir que el conjunto $\{y : y \in \mathbb{R}^+, \log(y) < 1\}$ esta acotado superiormente.

   e) Probar que $a = \sup(\{y : y \in \mathbb{R}^+, \log(y) < 1\})$ verifica que $\log(a) = 1$. Concluir que $\log \circ f_a(x) = x$.