Práctico Semana 6

1. Sumas superiores e inferiores

1. Calcule $S^*(f,P)$ y $S_*(f,P)$ en los siguientes casos

   a) $f(x)=x^2$, $P=\left\{-1,0,\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right\}$ *b*) $f(x)=\frac{1}{x}$, $P=\{1,2,3,4\}$ *c*) $f(x)=\sqrt{x}$, $P=\{0,1,4,9\}$

   d) $f(x)=\sin(x)$, $P=\left\{0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\pi\right\}$ *e*) $f(x)=\cos(x)$, $P=\left\{0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right\}$

2. *a*) Calcular $\int_1^3 x\,dx$ hallando sus sumas superiores e inferiores para particiones equispaciadas. Recordar que $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$.

   b) Calcular $\int_0^3 x^2\,dx$ hallando sus sumas superiores e inferiores para particiones equiespaciadas. Recordar que $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Bosquejar la función $f(x)$ definida por $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in\mathbb{Z} \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$

   Calcular $\int_a^b f(x)\,dx$

4. Probar las formulas del ejercicio 4 de la sección uno del práctico anterior, esto es:

   a) Si f es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

   b) Si f es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.

5. **Propiedades básicas**

   a) Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable y $c\in(a,b)$. Probar que se tiene la igualdad

   $$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^c f(t)\,dt+\int_c^b f(t)\,dt$$

   b) Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integrables tales que $f(x)\le g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Probar que para todo par $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$ se tiene que

   $$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$$

   c) Verificar la linealidad de la integral, esto es, dadas $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones integrables y $\lambda\in\mathbb{R}$ se cumple que

   $$\int_a^b f(x)+\lambda g(x)\,dx=\int_a^b f(x)+\lambda\int_a^b g(x)\,dx$$

6. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables, probar que las funciones $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $h_1(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$, $h_2(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$ son integrables.

   Deducir que si f es integrable entonces $|f|$ también, y además para todo par $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ se de la desigualdad $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

7. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x^n$.

   Dada la equipartición de $[0, 1]$ por k intervalos, digamos P_k, probar que

$$S^*(f, P_K) - S_*(f, P_k) \leq \frac{1}{k}$$

   Utilizar la desigualdad anterior para dar una formula que aproxime $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ con una precisión del 99,9%

8. **Funciones de Lipschitz**

   Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice de Lipschitz o lipschitziana si existe $K > 0$ tal que para todo par de puntos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$

   a) Probar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable entonces la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es lipschitziana.

   b) Pruebe que una función lipschitziana es integrable.

   c) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipchitziana, no negativa, y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Probar que si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Dar un ejemplo de función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no negativa, no nula, tal que $\int_0^1 g(t)\,dt = 0$.

9. Probar que una función monótona creciente y acotada es integrable. Sugerencia: Para probar que es integrable en el intervalo $[a, b]$, tomar una partición equispaciada de tamaño $\frac{b-a}{n}$.

10. Sea f una monótona estricta en $[a, b]$.

   a) Probar que

$$\int_a^x f(t)\,dt + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - xf(x) + af(a) = 0 \;\; \forall x \in [a, b]$$

   Interprete geométricamente el resultado.

   b) Calcular $\int_1^2 \sqrt{t}\,dt$

11. Sea P una equipartición de $[0, 1]$, halle la suma superior e inferior de las siguientes funciones

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad b)\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad c)\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Determine cuáles de estas funciones son integrables y cuales no.

12. De ejemplos de funcions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrables, $f \neq g$ y tales que $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ para todo par $a, b \in \mathbb{R}$.

13. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables, no negativas. Sean P una partición de $[a, b]$, M_i', m_i' los supremos e ínfimos en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ para f. De forma análoga notamos M_i'', m_i'' para g y $M_i.m_i$ para fg.

a) Demuestre que $M_i \leq M_i' M_i''$ y $m_i \geq m_i' m_i''$.

b) Deduzca que

$$S^*(fg, P) - S_*(fg, P) \leq \sum_{i=0}^{n-1} [M_i' M_i'' - m_i' m_i''](t_{i+1} - t_i)$$

c) Aplicando el hecho de que f, g estan acotadas, notemos M a una cota superior para ambas, demuestre que

$$S^*(fg, P) - S_*(fg, P) \leq M \left(\sum_{i=0}^{n-1} [M_i' - m_i'](t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=0}^{n-1} [M_i'' - m_i''](t_{i+1} - t_i) \right)$$

d) Demuestre que fg es integrable.

e) Estudie para el caso de f, g funciones integrables cualesquiera.

14. De las siguientes variaciones de la definición de integrabilidad, determine las implicancias entre ellas y si hay variaciones equivalentes.

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es integrable en el intervalo $[a, b]$ si

a) (Definición de integrable) Para todo $\epsilon > 0$, existe una partición P de $[a, b]$ tal que $S(f, P) - s(f, P) \leq \epsilon$

b) Para todo $\epsilon > 0$, se cumple que toda partición P de $[a, b]$ verifica que $S(f, P) - s(f, P) \leq \epsilon$

c) Existe $\epsilon > 0$, tal que existe una partición P de $[a, b]$ se verifica que $S(f, P) - s(f, P) \leq \epsilon$

d) Existe $\epsilon > 0$, tal que para toda partición P de $[a, b]$ se verifica que $S(f, P) - s(f, P) \leq \epsilon$.

Para las siguientes funciones, determinar cuáles de las varaiciones de integrabiliad se verifican:

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = 0, \qquad f_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

2. Áreas

1. Calcule el área encerrada por las siguientes funciones en el intervalo establecido

a) $f(x) = x - x^2, g(x) = -x,$ en $[-1, 2]$ *b*) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x},$ en $[0, 2]$

c) $f(x) = \sin(x) + 1, g(x) = 3,$ en $[0, 2\pi]$

2. Calcule el área delimitada por

a) $f(x) = x^2,\ g(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2$ *b*) $f(x) = x^2,\ g(x) = 1 - x^2$ *c*) $f(x) = x^2,\ g(x) = 1 - x^2,\ h(x) = 2$

d) $f(x) = x^2 - 1,\ g(x) = |x|$ *e*) $f(x) = x^3 - x,\ g(x) = 0$

f) $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = 2,$ y el eje vertical *g*) $f(x) = x^2, g(x) = x^2 - 2x + 4,$ y el eje vertical

h) Exámen, diciembre 2015, MO: $f(x) = x^2 - 3x + 2,\ g(x) = -x^2 + 2$

3. Verificar que la definición de integral coincide con la de área bajo el gráfico para

a) un rectángulo apoyado el eje x *b*) un triángulo con base en el eje x

c) Calcular el área del paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(2, 3)$, $(1, 4)$, $(3, 7)$

4. Acotar el área de un círculo de radio 1 con un error menor al 0,1 %

3. Aplicaciones

1. **Trabajo**

   Suponga que una partícula p se mueve sobre una dirección fija. El trabajo W invertido sobre esta, por un agente que ejerce una fuerza F constante y colineal con el desplazamiento, es $W = F\Delta r$.

   Bajo estas hipótesis:

   - La fuerza F podría ser negativa
   - El trabajo solo depende de la fuerza y el modulo del desplazamiento y no como ocurrió este desplazamiento.
   - Si la partícula p se mueve desde el punto a hasta el punto b se tiene que $W = \int_a^b F(x)\,dx$.

   Para trabajar con este problema debemos tener expresada la fuerza como función de la posición y no del tiempo. Por ejemplo, podríamos calcular el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria de la Tierra a un objeto que cae. Otro ejmplo, es la fuerza ejercida por un resorte.

   Notemos como $W_a^b(F)$ al trabajo invertido por la fuerza F.

   Propiedades esperables de esta cantidad

   (I) Propiedad aditiva: Si $a < b < c$ entonces $W_a^c(F) = W_a^b + W_b^c$

   (II) Propiedad monótona: Si $f \leq g$ en $[a,b]$ entonces $W_a^b(f) \leq W_a^b(g)$

   (III) Fórmula elemental: Si F es constante, por ejemplo $F(x) = c$ para todo $x \in (a,b)$ entonces $W_a^b(F) = c(b-a)$

   a) Probar que si F es constante a trozos entonces $W_a^b(F) = \int_a^b F(x)\,dx$.

   b) Suponga que el trabajo se ha definido para una famila de funciones F de modo que satisface (I), (II) y (III). Probar que si F es una función integrable se cumple que $W_a^b(F) = \int_a^b F(x)\,dx$.

   c) Un balón se suelta desde 20 metros de altura. Calcular el trabajo de la fuerza de gravedad cuando el balón toca el suelo.

   d) Una partícula se desplaza sobre una dirección desde $x = 0m$ hasta $x = 4m$. Esta partícula se encuentra sometida a una única fuerza F dada por $F(x) = \begin{cases} 1{,}5x & \text{si } x \leq 2 \\ 6-(1{,}5)(2-x) & \text{si } x > 2 \end{cases}$

   Calcular el trabajo realizado por F.

2. **Convolución**

   La operación de convolución es una herramienta útil en muchas áreas tanto de matemática como de ingeniería.

   Veremos algunos ejemplos de este operador, para las condiciones en las que estamos trabajando.

   Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables y tales que existen a_1, b_1, a_2, b_2 con $f(x) = 0$, $\forall x \notin [a_1, b_1]$ y $g(x) = 0$, $\forall x \notin [a_2, b_2]$.

   Definimos para f y g en estas hipótesis la convolución como $(f * g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   $$(f*g)(t) = \int_{a_1}^{b_1} f(x)g(t-x)\,dx$$

   Calcular $(f * g)$ para los siguientes casos.

   a)

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

b)

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[0,1]\\ 0 & \text{si } x\notin[0,1]\end{cases}\qquad \text{y} \qquad g(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\in[0,1]\\ 2-x & \text{si } x\in[1,2]\\ 0 & \text{si } x\notin[0,2]\end{cases}$$

c)

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\in[0,1]\\ 0 & \text{si } x\notin[0,1]\end{cases}\qquad \text{y} \qquad g(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\in[0,2]\\ 0 & \text{si } x\notin[0,2]\end{cases}$$

4. Complementarios

1. A partir de lo visto en clase sobre las integrales de los polinomios, calcular:

$$a)\ \int_0^3 x^2\,dx \qquad b)\ \int_0^1 5t^4\,dt \qquad c)\ \int_0^4 \frac{x^3}{4}\,dx \qquad d)\ \int_{-100}^{100} \frac{20x^{51}}{31}\,dx$$

$$e)\ \int_0^2 x^2+x \qquad f)\ \int_{-1}^3 x^2-x+1\,dx \qquad g)\ \int_{-1}^2 3x^2-2x+1\,dx \qquad h)\ \int_1^3 x^5+\frac{2x^3}{3}-x\,dx$$

$$i)\ \int_0^2 x(x+1)\,dx \qquad j)\ \int_{-1}^4 (t+1)(t-2)\,dt \qquad k)\ \int_{-1}^1 (x+1)(x+2)\,dx \qquad l)\ \int_{-1}^1 x^{41}(x-1)(x+1)\,dx$$

2. *a*) Dé ejemplo de 2 funciones f, g que sean integrables pero que $f\circ g$ no lo sea.
   b) Determinar si es verdadero o falso la siguiente afirmación. Si f^2 es integrable entonces f lo es
3. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ defnida por

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & \text{si } x=\frac{p}{q},\text{ con } \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible}\end{cases}$$

   Probar que f es integrable.
4. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=a+b\sqrt{2},\ a,b\in\mathbb{Z}\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

   Determinar si f es integrable