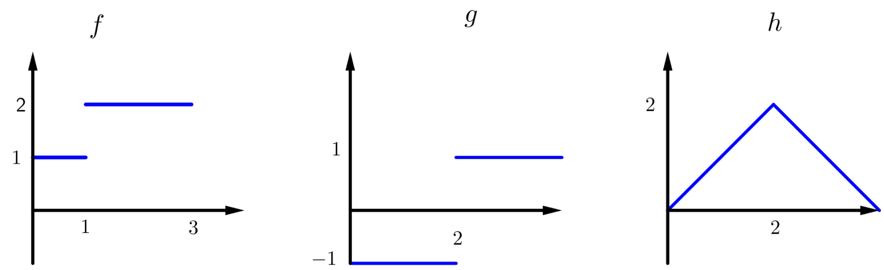
Universidad de la República | **Cálculo diferencial integral en una variable**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Segundo semestre 2017**

Práctico Semana 5

En esta práctico se trabajara con la idea intuitiva de integral, donde la integral de una función f en el intervalo $[a,b]$ es el área signada entre el gráfico y el eje x

Algunos ejemplos de integrales



- $\int_0^3 f(t)dt = 1\times 1 + 2\times 2 = 5$
- $\int_0^2 g(t)dt = -1\times 2 = -2, \quad \int_0^4 g(t)dt = 0$
- $\int_0^4 h(t)dt = \frac{2\times 2}{2} = 2$

Todos los resultados de este práctico se podran probar formalmente luego, aquí estan para dar ideas intuitivas del problema y trabajar con acotaciones.

Se recuerdan las propiedades de área.

Propiedades basicas de áreas

- Si $A\subset B$ entonces $\text{Área}(A)\le \text{Área}(B)$
- El área de un rectángulo R de lados a y b es $\text{Área}(R) = ab$. El área de un triángulo rectángulo T de base b y altura h es $\text{Área}(T) = \frac{hb}{2}$ (esto se puede deducir).
- Si $A\cap B = \emptyset$ entonces $\text{Área}(A\cup B) = \text{Área}(A) + \text{Área}(B)$. Además si dos rectangulos R_1 y R_2 se intersecan sólo en lados entonces $\text{Área}(R_1\cup R_2) = \text{Área}(R_1) + \text{Área}(R_2)$ (esto último en realidad se puede deducir).

Se puede asumir que todas las funciones de este práctico son integrables.

1. Integrales (Areas algebráicas)

1. Calcular la integral de las siguientes funciones en el intervalo $[0,2]$.

$$a)\quad f(x)=1 \qquad b)\quad f(x)=x \qquad c)\quad f(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0\le x\le 1\\ x-2 & \text{si } 1< x\le 2\end{cases} \qquad d)\quad f(x)=|x-1|$$

$$e)\quad f(x)=x+[x] \qquad f)\quad f(x)=x-[x] \qquad g)\quad f(x)=[3x]$$

2. Calcular la integral de las funciones f, g y h del ejercicio 3, parte b, Sección Funciones del Práctico 2 en el intervalo $[0,4]$.

3.

   a) Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\int_{-1}^{1} h(t)\,dt = 0$ y $\int_{-1}^{3} h(t)\,dt = 6$. Calcular $\int_{1}^{3} h(t)\,dt$.

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\int_{2}^{8} f(t)\,dt = 20$ y $\int_{4}^{8} f(t)\,dt = -12$. Calcular $\int_{2}^{4} f(t)\,dt$.

4. Sabiendo que $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ es una función integrable, demostrar que:

   a) Si f es par, entonces $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$.

   b) Si f es impar, entonces $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

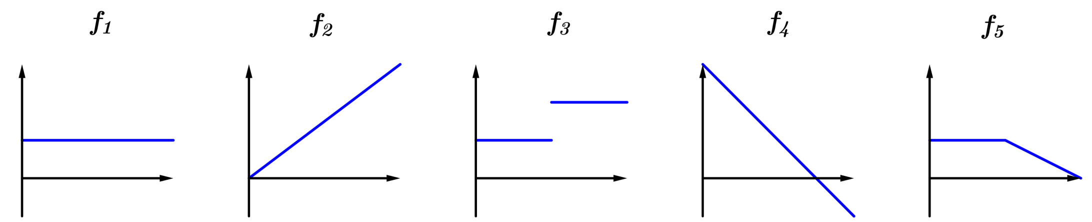
5. Sean f, g dos funciones afines y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

   Probar que si $f(a) - g(a) = -(f(b) - g(b))$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$. Sugerencia: Verifique que se cumple en un ejemplo concreto y luego trate de generalizar.

6. a) ¿Que valores de a y b, $a < b$, maximizan el valor de la integral $\int_a^b x - x^2\,dx$?

   b) ¿Que valores de a y b, $a < b$, minimizan el valor de la integral $\int_a^b -2x^2 + x^4\,dx$?

7. Bosquejar las funciones $F_i(x) = \int_0^x f_i(t)dt$, para las siguientes funciones.



8. Calcule explicitamente y grafique la función $F(x) = \int_0^x f_i(t)\,dt$ para

   a) $f_1(t) = \text{máx}(\{t, 2-t\})$ b) $f_2(t) = [t]$ c) $f_3(t) = t - [t]$

9. Ordenar de forma creciente en área los siguientes conjuntos:

   a) un cuadrado de lado 2 b) un rectángulo de lado menor 2 c) un rombo de diagonales 2

   d) una circunferencia de radio 1 e) una elipse de eje mayor $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

10. Calcular la integral de las siguientes funciones en $[0, 2]$.

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$b)\quad f(x) = \begin{cases} \left(x - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)2^{n+1} & \text{si } \left(\frac{1}{2}\right)^n \le x \le \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ 1 - \left(x - \left(\left(\frac{1}{2}^n\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right)2^{n+1} & \text{si } \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < x < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}$$

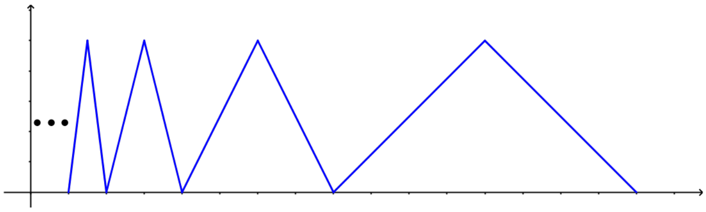


Figura 1: bosquejo de la función f en la parte b

11. Calcule el área de la región S comprendida entre las graficas de f y g, en el intervalo indicado para cada caso. Bosquejar en cada caso las dos graficas y sombrear S.

    a) $f(x) = x$, $g(x) = 1 - 2x$ en $[-1, 2]$ *b*) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x - 1|$ en $[-1, 1]$

2. Valor medio y acotaciones

1. Demostrar la siguiente desigualdad:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}\, dx \leq \frac{1}{2}$$

2. Sea $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$ integrable tal que $f(x) \geq 2$, para todo $x \in [-1, 0] \cup [2, 4]$ y $f(x) \geq 4$, para todo $x \in [0, 2]$.

    a) Probar que $\int_{-1}^{4} f(x)\, dx \geq 14$

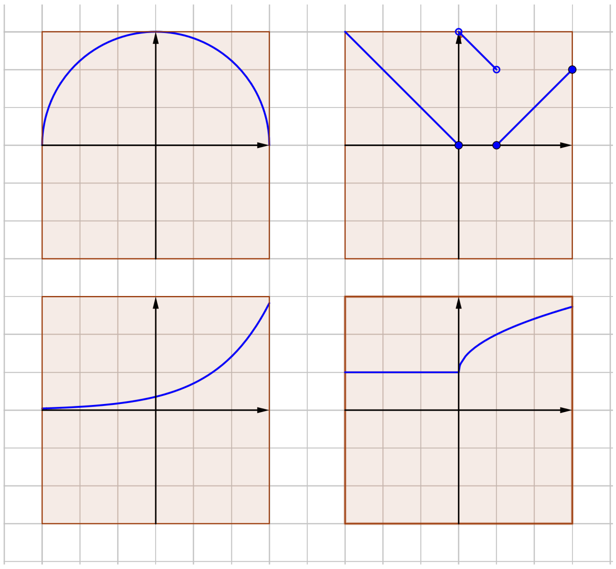
    b) Si además se sabe que $f(x) \geq 3$ para todo $x \in [1, 3]$, hallar $m \in \mathbb{R}$ tal que $14 < m < \int_{-1}^{4} f(x)\, dx$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monotona creciente e integrable.

    Probar que:

    a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leq \int_0^n f(t)\, dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$ *b*) $\displaystyle\sum_{k=0}^{mn-1} \frac{f\left(\frac{k}{m}\right)}{m} \leq \int_0^n f(t)\, dt \leq \sum_{k=1}^{mn} \frac{f\left(\frac{k}{m}\right)}{m}$, para todo $m \in \mathbb{N}^+$

4. Para las siguientes gráficas estimar el valor c tal que $\int_a^b f(x)\, dx = c(b - a)$, bosquejar el rectangulo de alto c y base $[a, b]$



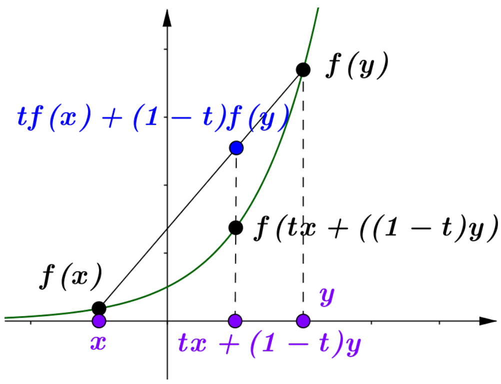
En cada caso discutir la existencia de x_0 tal que $f(x_0) = c$

5. Dar un ejemplo de función integrable f tal que $\forall c \in [a,b]$ se cumple que $\int_a^b f(x)\,dx \neq (b-a)f(c)$

6. **Funciones convexas**

   Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función, donde I es un intervalo o $\mathbb{R}$, decimos que f es convexa si $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0,1]$ se cumple que $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

   En otras palabras, dados dos puntos del gráfico de f si se traza el segmento de recta por ellos, el gráfico de f nunca esta por arriba del este.



   a) Probar que la función $f(x) = x^2$ es convexa

   b) Probar que
   $$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b t\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) + f(a)\,dt$$

   c) Probar que si f es convexa y creciente entonces
   $$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) - f(a)\,dt \leq \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt$$

7. Estimar a partir de las gráficas las integrales de

$$a)\quad f_1(x) = \frac{4}{1+x^2} \qquad b)\quad f_2(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad c)\quad f_3(x) = 2^{x-1}$$

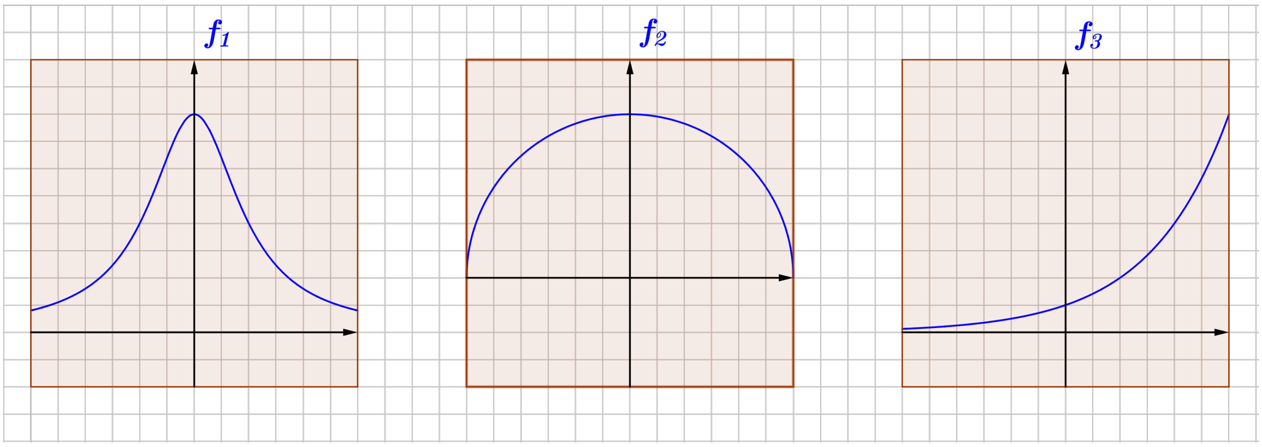


Figura 2: gráficas de las funciones f_i

3. Aplicaciones

1. *a*) Suponga que un auto se desplaza a una velocidad constante, digamos 50km/h , en una carretera recta. Digamos además que la posición inicial era el kilometro 0, y a la media hora estaba en el kilometro 25.

   1) Calcular la posición del vehículo en un momento t_1 genérico.
   2) Deducir que se verifica la fórmula
   $$x(t) = \int_0^t 50\, dt$$
   3) Verificar que la igualdad de la parte anterior sigue siendo valida si la velocidad es constante a trozos.

   b) Suponga que 3 autos inician en el mismo lugar $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0)$ y tienen velocidades $0 \leq v_1(t) \leq v_2(t) \leq v_3(t)$ donde v_1 y v_3 son constantes a trozos.

   1) Deducir que
   $$\int_0^t v_1(t)\, dt \leq x_2(t) \leq \int_0^t v_3(t) dt$$
   2) Discutir sobre si es valida la afirmación
   $$x_1(t_1) - x(0) = \int_0^{t_1} v_1(t) dt$$

   c) Repetir las partes de este ejercicio para relacionar la velocidad $v(t)$ con la aceleración $a(t)$. Verificar que
   $$x(t_1) - x(0) = \int_0^{t_1} \left(\int_0^t a(s)\, ds \right) dt$$

   d) Dada una particula que solo se mueve en una dirección. Probar que la definición de velocidad media coincide con la de valor medio para la integral.

e) **Caida libre**

Si se suelta una pelota desde un edificio, digamos de $20m$ de altura, una primera aproximación dice que podemos suponer que la única fuerza que actua sobre ella es la gravedad (ignorando la resistencia del aire). Bajo estas hipotesis se obtiene que la aceleración hacia la Tierra es de $9{,}8m/s^2$.

¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al suelo? ¿A qué velocidad llega?

f) **Caida libre con resistencia al aire**

Un objeto se deja caer desde un helicoptero. El objeto cae cada vez más rápido pero su aceleración decrece con el tiempo debido a la resistencia del aire. La aceleración se mide en pies/seg^2 y se registra cada segundo despues de soltar el objeto durante 5 segundos, como se muestra en la siguiente tabla

t	0	1	2	3	4	5
a	32.00	19.41	11.77	7.14	4.33	2.63

1) Encuentre una estimación superior para la velocidad cuando $t = 5$. Repita para una estimación inferior.
2) Encuentre una estimación para la distancia recorrida cuando $t = 3$.