Práctico Semana 4

1. Número real

1.

a) Probar que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ son irracionales. ¿Por qué esto no se aplica a $\sqrt{4}$?

b) Sean $a \in \mathbb{Q}$ y b $\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Probar que $a + b \notin \mathbb{Q}$. ¿Se puede decir lo mismo de ab?

c) Dé ejemplos de pares de números irracionales (digamos a, b) tal que $a + b$ y ab sean racionales.

d) Probar que dados $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$ existe $z \in \mathbb{R}$ con $x < z < y$. Repetir esta parte para $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

2. Demuestre que si $x = p + \sqrt{q}$ donde p, q son racionales entonces dado $m \in \mathbb{N}$ existen $a, b \in \mathbb{Q}$ tal que $x^m = a + b\sqrt{q}$.

   Demuestre además que $(p - \sqrt{q})^m = a - b\sqrt{q}$.

3. Representar los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}$, además hallar supremo e ínfimo y estudiar si son máximos o mínimos.

   a) $[-1, 1]$ b) $(2, 5)$ c) $(2, 6]$ d) $[-10, -2)$ e) $[0, 0]$

   f) $[2, 5] \cup [0, 1]$ g) $[-1, 1] \cap (0, 2)$ h) $[0, 5) \setminus (1, 2)$ i) $[1, 2] \setminus (1, 2)$

   j) $[1, 2] \setminus [3, 4]$ k) $([1, 2] \cup [3, 4]) \cap [0, 3]$ l) $[1, 2] \cup ([3, 4] \cap [0, 3])$

4. Hallar supremo e ínfimo de los siguientes conjuntos y estudiar si son máximos o mínimos respectivamente.

   a) $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$ b) $\{\theta : \cos(\theta) = \sin(\theta)\}$ c) $\{\theta \in [0, 2\pi] : \cos(\theta) < \sin(\theta)\}$

   d) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 3\right\}$ e) $\{x \in \mathbb{R}^+ : (x-1)(x-2) < 0\}$ f) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{3x+1}{x-2} \geq 0\right\}$

   g) $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ h) $\left\{\left(\frac{-1}{2}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$

   i) $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ j) $[1, 2] \cap \mathbb{Q}$ k) $\{x : x^2 + x - 1 \leq 0\} \cap \mathbb{Q}$

5.

a) Primer parcial, primer semestre 2014, MO

Sea $A = A_1 \cup A_2$, donde:

$$A_1 = \left\{\frac{1}{2n-1} - 1 : n \geq 1\right\}, A_2 = \left\{\frac{1}{2n} + 1 : n \geq 1\right\}$$

Entonces:

(A) $\sup(A) = 2, \inf(A) = -1$.

(B) $\max(A) = \frac{3}{2}, \inf(A) = -1$.

(C) $\sup(A) = \frac{3}{2}, \inf(A) = -1$ pero A no tiene máximo ni mínimo.

(D) $\sup(A) = \frac{3}{2}, \inf(A) = -1$; A tiene máximo pero no tiene mínimo.

(E) $\sup(A) = \frac{3}{2}, \text{ínf}(A) = -1$; A tiene mínimo pero no tiene máximo.

b) Primer parcial, segundo semestre 2014, MO

Sea $A = A_1 \cup A_2$, donde, $A_1 = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ y $A_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \cos(n\frac{\pi}{2}), n \in \mathbb{N}, n \geq 0\right\}$

(A) $\sup(A) = 1$ e $\text{ínf}(A) = -1$; A tiene mínimo pero no tiene máximo.

(B) $\sup(A) = 1$ e $\text{ínf}(A) = -1$; A tiene máximo pero no tiene mínimo.

(C) $\sup(A) = 1$ e $\text{ínf}(A) = -1$ pero A pero no tiene máximo ni mínimo.

(D) $\sup(A) = 2$ e $\text{ínf}(A) = -1$.

(E) $\text{máx}(A) = 1$ y $\text{mín}(A) = -1$.

6. **Consecuencias básicas de la definición de supremo**

   a) Probar que el axioma de completitud (existencia de supremo para conjuntos acotados superiormente) es equivalente a la propiedad "todo conjunto acotado inferiormente tiene ínfimo".

   b) Sea A un conjunto no vacío, acotado superiormente y $\alpha = \sup(A)$. Probar que para todo $\delta > 0$, existe $a_\delta \in A$ tal que $\alpha - \delta < a_\delta \leq \alpha$.

7. Sea $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$. Probar que A está acotado inferiormente. Notemos α al ínfimo de A.

   a) Verificar que $\alpha \geq 0$.

   b) Verificar que si α es una cota inferior entonces 2α también lo es.

   c) Deducir que $\alpha = 0$. Deducir que para todo $x > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x > \frac{1}{n}$.

8. A partir del ejercicio anterior se pueden deducir algunas propiedades.

   a) Probar que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente. Deduzca que para $x \in \mathbb{R}$, existen m y n enteros, tales que $m < x < n$.

   b) Dado $x_0 \in \mathbb{R}^+$ definimos el conjunto A_{x_0} como $A_{x_0} = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{x_0}{n}$ para $n \in \mathbb{N}^+\}$. Probar que $\text{ínf}(A_{x_0}) = 0$.

   Deducir que para cualquier par de puntos $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$ existe $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < z < y$.

9. Primer parcial, primer semestre 2016, MO

   Sea $A = \left\{\frac{m}{n} : 0 < m < n, m, n \in \mathbb{N}\right\}$

   a) A está acotado superiormente, tiene supremo, pero no máximo.

   b) A no está acotado superiormente, por lo tanto no tiene supremo.

   c) A tiene supremo, que es máximo.

   d) A no esta acotado superiormente, no tiene máximo, pero tiene supremo.

   e) A está acotado superiormente, pero no tiene supremo.

10. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define $\alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$ y $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

    a) 1) Si $A \subset B$ y B es acotado demostrar que $\text{ínf}(B) \leq \text{ínf}(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$.

    2) Dar un ejemplo donde $A \subset B$, B acotado e $\text{ínf}(B) = \text{ínf}(A) < \sup(A) < \sup(B)$.

    b) 1) Si $a \leq b$, $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$, demostrar que $\sup(A) \leq \text{ínf}(B)$.

    2) Dar un ejemplo donde $a \leq b$, $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$, y $\sup(A) = \text{ínf}(B)$.

    c) 1) Probar que si A y B son acotados entonces $\text{ínf}(A + B) = \text{ínf}(A) + \text{ínf}(B)$ y $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

    2) Si $A = (0,2]$ y $C = (0,3]$, encontrar un conjunto B tal que $A + B = C$. Verificar con estos conjuntos A y B las igualdades demostradas en el item anterior.

    d) 1) Probar que si A es acotado y $\alpha > 0$ entonces $\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$ e $\text{ínf}(\alpha A) = \alpha\, \text{ínf}(A)$.

    2) Probar que si A es acotado y $\alpha < 0$ entonces $\sup(\alpha A) = \alpha\, \text{ínf}(A)$ e $\text{ínf}(\alpha A) = \alpha \sup(A)$.

2. Funciones reales

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$, es decir el mayor entero menor o igual a x.

   Bosquejar las funciones

   $$a)\quad f(x) \qquad b)\quad f_1(x) = x - f(x) \qquad c)\quad f_2(x) = \sqrt{f_1(x)} \qquad d)\quad f_3(x) = f(x) + f_2(x)$$

   $$e)\quad f_4(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad f)\qquad f_5(x) = \frac{1}{f_4(x)}$$

2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que los conjuntos $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ y $\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$ están acotados.

   Fijo un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, probar que

   $$\sup\{(f+g)(x) : x \in [a,b]\} \leq \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} + \sup\{g(x) : x \in [a,b]\}$$

   $$\text{ínf}\{(f+g)(x) : x \in [a,b]\} \geq \text{ínf}\{f(x) : x \in [a,b]\} + \text{ínf}\{g(x) : x \in [a,b]\}$$

   Dar un ejemplo de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in [a,b]\}$ esté acotado y $f(x) < \sup(\mathrm{Im}(f))$ para todo $x \in [a,b]$

3. **Funciones lipchizianas**

   Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice lipchiziana si existe un $K \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ para todo par $x, y \in \mathbb{R}$. Bosquejar las siguientes funciones y determinar cuáles son lipchizianas.

   $$a)\quad f(x) = x \qquad b)\quad f(x) = |x| \qquad c)\quad f(x) = x^2 \qquad d)\quad f(x) = \sqrt{|x|}$$

   e) Probar que si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones lipchizianas entonces $f \circ g$, $f + g$ son lipchizianas. Estudiar qué ocurre con fg.

   f) Interpretar geométricamente la condición de que f sea lipchiziana.

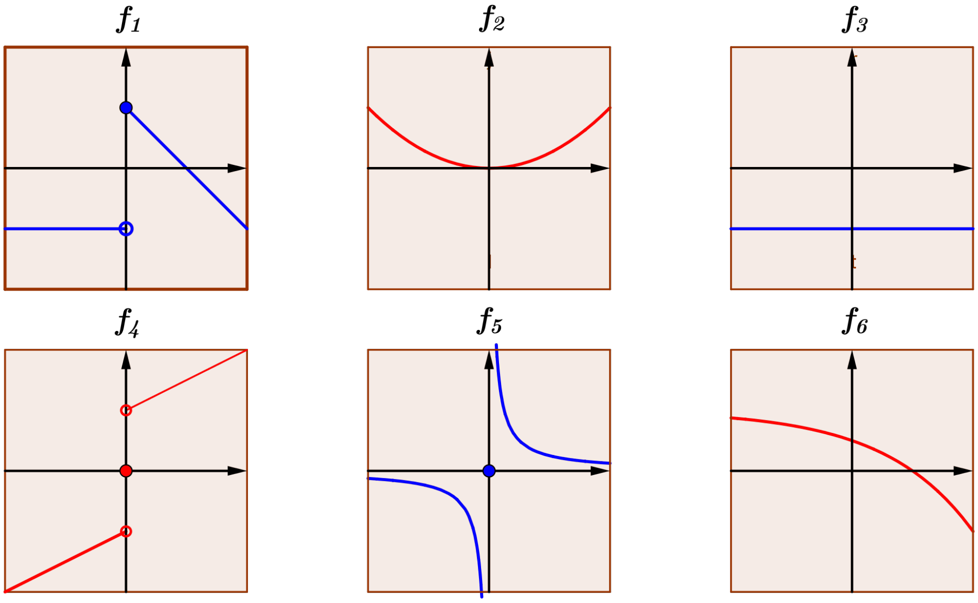
4. **Funciones crecientes**

   Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ decimos que f es creciente si $f(x) \leq f(y)$ para todo par de reales $x \leq y$. Decimos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente si $f(x) < f(y)$ para todo par $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$.

   Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es decreciente si $f(x) \geq f(y)$ para todo par de reales $x \leq y$. Decimos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente si $f(x) > f(y)$ para todo par $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$.

   a) Verificar que si f es estrictamente creciente entonces es creciente. Dé un ejemplo de una función creciente y no estrictamente creciente.

   b) Dadas las funciones f_i con las siguientes gráficas determinar cuáles son crecientes, decrecientes, estrictamentes crecientes, estrictamentes decrecientes o ninguna de estas.



c) Probar que si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son estrictamente crecientess entonces $f \circ g$ y $g \circ f$ también lo son.

d) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente, y $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$,
Probar que el conjunto $\{f(x) : x \in [a, b]\}$ está acotado y además $\sup\{f(x) : x \in [a, b]\} = f(b)$.
Probar que se cumplen las siguientes desigualdades.

$$\sup\{f(x) : x < a\} \le f(a) \le \inf\{f(x) : x > a\}$$

Dé ejemplos donde las desigualdades sean estrictas.

5. **Morfismos de Cuerpos**

En este ejercicio se estudiará qué funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, no nulas, verifican las siguientes propiedades

$$f(x+y) = f(x+y), \; f(xy) = f(x)f(y) \tag{1}$$

En cada paso mencionar qué propiedad o parte anterior se usó.

a) Probar que $f(0) = 0$.

b) Probar que $f(1) = 1$.

c) Para $n \in \mathbb{N}$ calcular $f(n)$.

d) Para $p, q \in \mathbb{Z}$, con $q \ne 0$ calcular $f\left(\frac{p}{q}\right)$.

e) Probar que $f(a^2) \ge 0$. Deducir que $f(a) > 0$ para todo $a > 0$.

f) Probar que f es estrictamente creciente, esto es, que si $a < b$, entonces $f(a) < f(b)$.

g) Dado $x \in \mathbb{R}$, probar que los conjuntos $\{f(a) : x < a, a \in \mathbb{Q}\}$ y $\{f(a) : a < x, a \in \mathbb{Q}\}$ están acotados inferior y superiormente respectivamente.
Probar que $\sup\{f(a) : a < x, a \in \mathbb{Q}\} \le f(x) \le \inf\{f(a) : a < x, a \in \mathbb{Q}\}$

h) Verificar que para $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $\sup\{f(a) : a < x, a \in \mathbb{Q}\} = \inf\{f(a) : a < x, a \in \mathbb{Q}\}$. Deducir que $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

i) Dar funciones distintas de la identidad que cumplan una de las propiedades pero no la otra.

6. **Definición función potencia**

   En este ejercicio se definirá la función $f(x) = 2^x$ y se probaran las propiedades básicas de la potencia.

   a) Definimos $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por inducción como
   - $f_1(1) = 2$
   - $f_1(n+1) = 2f_1(n), \forall n \in \mathbb{N}$

   1) Probar que $f(n+m) = f(n)f(m)$ para todo par $n, m \in \mathbb{N}$
   2) Probar que la función f_1 es estrictamente creciente y $Im(f_1)$ no está acotada

   b) Para definir la función en los enteros simplemente invertimos. Sea $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definida por
   $$f_2(n) = \begin{cases} f_1(n) & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{f_1(n)} & \text{si } -n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   1) Probar que $f_2(n+m) = f_2(n)f_2(m), \forall n, m \in \mathbb{Z}$
   2) Probar que la función f_2 es creciente

   c) Veamos ahora cómo definir f en $\mathbb{Q}$, surge así el problema de cómo definir, por ejemplo $2^{\frac{1}{2}}$,
   Sea $f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma: dado $\frac{p}{q}$ fracción irreducible $f_3\left(\frac{p}{q}\right) = \sup\{y \in \mathbb{R} : y^q \leq f_2(p)\}$.

   1) Verificar que la función f_3 es una extensión de f_2, es decir $f_2(n) = f_3(n), \forall n \in \mathbb{Z}$.
   2) Probar que $f_3(x+y) = f_3(x)f_3(y)$
   3) Probar que la función f_3 es creciente

   d) Estamos ahora en condiciones de definir f como función real
   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
   $$f(x) = \sup\{y \in \mathbb{R} : y = f_3(z) \text{ tal que } z \leq x\}$$

   1) Verificar la que función f esta bien definida.
   2) Probar que la función f es una extensión de f_3, es decir $f(x) = f_3(x), \forall x \in \mathbb{Q}$
   3) Probar que la función f es creciente
   4) Probar que $f(x+y) = f(x)f(y)$
   5) Probar que dado $a \in \mathbb{R}$ se cumplen las igualdades $\sup\{f(x) : x < a\} = f(a) = \inf\{f(x) : x > a\}$

   e) Verificar que la definición se puede adaptar a cualquier base. Explique qué cambiaría para definir 3^x.

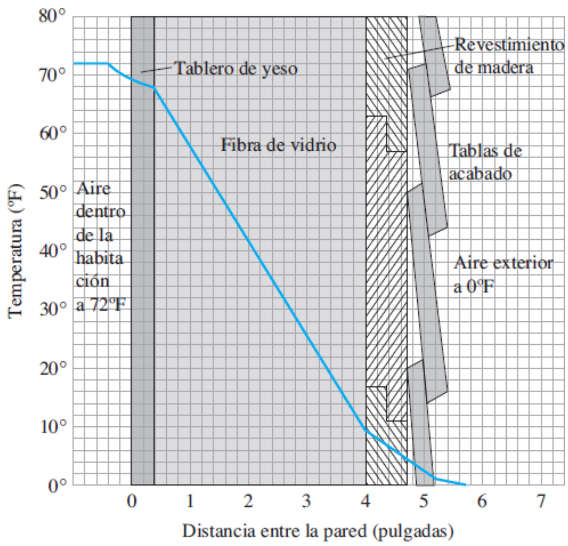
   f) Dadas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = a^x$ y $g(x) = b^x$ probar que $f(x)g(x) = (ab)^x$.

3. Aplicaciones

1. **Aislantes**

   Mida las pendientes de la siguiente figura para estudiar el cambio de temperatura, en grados Fahrenheit por pulgada, para estos aislantes.

   a) tablero de yeso *b*) fibra de vidrio *c*) revestimiento de madera



d) De acuerdo con la figura, ¿cuál es el mejor aislante? ¿Cuál es el peor? Explique.

2. Se vierte agua en la jarra de la imagen a una velocidad constante hasta llenarla. La capacidad de la misma es de 1,5 l.

Sea $H(t)$ la altura del agua dentro de la jarra en el tiempo t, digamos además que la jarra estaba vacía, es decir $H(0) = 0$

Bosquejar la función $H(t)$.

Suponga que se desea hacer marcas que indiquen la capacidad cada 0,2 l.¿Estarían todas las líneas a la misma distancia?

3. **Ley de Torricelli**

Un tanque contiene 50 l de agua, que se descargan por una fuga en el fondo, haciendo que el tanque se vacíe en 20 minutos. La rapidez con la que sale agua del tanque varía con el tiempo, cuando el tanque está lleno, hay mayor presión sobre el fondo por lo que se descarga más rápido.

La Ley de Torricelli da el volumen de agua restante en el tanque después de t minutos, y esta expresión está dada por $V(t) = 50\left(1 - \frac{t}{20}\right)^2$.

a) Calcular $V(0)$ y $V(20)$. ¿Coincide con los valores esperados?

b) ¿Cuál es el dominio efectivo de la función V?, esto es, ¿para qué valores de t la expresión algebraica responde al modelo?

c) Grafique V en su dominio.